

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

POUR OBTENIR

le Titre de Docteur de l'Université

PAR

LÉON KIRSTE

INGÉNIEUR E. S. A. — C. M.

1^{re} THÈSE. — Recherche du maximum pratique de l'agrandissement des avions commerciaux basée sur une étude simultanée des conditions de vol et de la résistance des matériaux.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le **7 JUL** 1928 devant la Commission d'examen.

MM. MAURAIN. . .	Président
KENIGS. . .	} Examineurs
MARCHIS. . .	
TOUSSAINT. . .	

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris

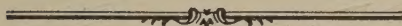
POUR OBTENIR

le Titre de Docteur de l'Université

PAR

LÉON KIRSTE

INGÉNIEUR E. S. A. — C. M.



1^{re} THÈSE. — Recherche du maximum pratique de l'agrandissement des avions commerciaux basée sur une étude simultanée des conditions de vol et de la résistance des matériaux.

2^e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

soutenues le **7 JUIL.** ~~1928~~ devant la commission d'examen

MM. MAURAIN. .	Président
KENIGS. . .	} Examineurs
MARCHIS. .	
TOUSSAINT.	

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

MM.

Doyen.
Doyens honoraires....

C. MAURAIN, *Professeur*, Physique du globe.
P. APPELL, M. MOLLIARD.

Professeurs honoraires.

P. PUISEUX.
V. BOUSSINESQ.
A. JOANNIS.
H. LE CHATELIER.
H. LEBESGUE.
A. FERNBACH.
A. LEDUC.

Professeurs.

EMILE PICARD Analyse supérieure et algèbre supérieure.
G. KÖNIGS Mécanique physique et expérimentale.
E. GOURSAT Calcul différentiel et calcul intégral.
P. JANET Electrotechnique générale.
F. WALLERANT... Minéralogie.
H. ANDOYER Astronomie.
P. PAINLEVÉ Mécanique analytique et mécanique céleste.
Gabriel BERTRAND Chimie biologique.
Mme P. CURIE... Physique générale et radioactivité.
M. CAULLERY Zoologie (Evolution des êtres organisés).
G. URBAIN Chimie minérale.
Emile BOREL Calcul des probabilités et Physique mathém.
L. MARCHIS Aviation.
Jean PERRIN Chimie physique.
Rémy PERRIER . Zoologie (Enseignement P. C. N.).
H. ABRAHAM Physique.
M. MOLLIARD ... Physiologie végétale.
E. CARTAN. Géométrie supérieure.
L. LAPICQUE. Physiologie générale.
E. VESSIOT Théorie des fonctions et théorie des transformations.
A. COTTON Physique générale.
J. DRACH Application de l'analyse à la géométrie.
Charles FABRY . Physique.
Charles PÉREZ . Zoologie.
Léon BERTRAND . Géologie structurale et géologie appliquée.
R. LESPIEAU. Théories chimiques.
E. RABAUD Biologie expérimentale.
P. PORTIER Physiologie comparée.
E. BLAISE Chimie organique.
P.-A. DANGEARD. Botanique.
Paul MONTEL ... Mécanique rationnelle.
P. WINTREBERT . Anatomie et histologie comparées.
O. DUBOSCQ. ... Biologie maritime.
G. JULIA Mathématiques générales.
A. JOB Chimie générale.
A. MAILHE. Etude des combustibles.
L. LUTAUD Géographie physique et géologie dynamique.
Eugène BLOCH . Physique théorique et physique céleste.
Henri VILLAT ... Mécanique des fluides et applications.
Ch. JACOB Géologie.
P. PASCAL Chimie appliquée.



E. HÉROUARD Zoologie.
E. PÉCHARD Chimie (Enseigt P. C. N.).
V. AUGER Chimie analytique.
M. GUICHARD Chimie minérale.
A. GUILLET Physique.
C. MAUGUIN Minéralogie.
L. BLARINGHEM ... Botanique.
A. MICHEL-LÉVY .. Pétrographie.
A. DEREIMS..... Géologie.
R. DONGIER Physique du globe.
A. DENJOY Calcul diff. et intégral.
H. BÉNARD Physique (P. C. N.).

E. DARMOIS Physique.
G. BRUHAT Physique.
H. MOUTON Chimie physique.
L. JOLEAUD Paléontologie.
M. JAVILLIER Chimie biologique.
A. DUFOUR Physique (P. C. N.).
F. PICARD Zoologie (Evolution des êtres organisés).
ROBERT-LÉVY Zoologie.
L. DUNOYER Optique appliquée.
A. GUILLIERMOND .. Botanique (P. C. N.).
A. DEBIERNE Radioactivité.

Secrétaire..... Daniel TOMBECK.

A la Mémoire de mon Père,
le Docteur JEAN KIRSTE

MEMBRE PERPÉTUEL DE LA SOCIÉTÉ DE LINGUISTIQUE DE PARIS
MEMBRE CORRESPONDANT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE VIENNE
PROFESSEUR DE PHILOGIE ORIENTALE A L'UNIVERSITÉ DE GRAZ

A mon Chef,
Monsieur LOUIS BLÉRIOT,
dans les Usines duquel
j'ai pu établir les bases de ce travail ;

A
M. le Professeur MARCHIS,
de la Faculté des Sciences de Paris,
qui m'a aidé de ses bons conseils ;

Hommage et Reconnaissance.

LÉON KIRSTE

INGÉNIEUR E. S. A. — C. M.

**Recherche du maximum pratique
de l'agrandissement des avions commerciaux,
basée sur une étude simultanée
des conditions de vol et de la résistance des matériaux**

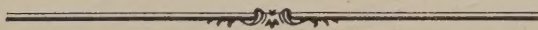


TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
CHAPITRE I. — Etudes antérieures	11
--- II. — Définition du problème.....	14
--- III. — Etude de la répartition des charges.....	16
--- IV. — Calcul du poids de construction.....	27
--- V. — Calcul de la puissance motrice.....	42
--- VI. — Calcul de la « Capacité de Transport ».....	49
--- VII. — Interprétation numérique du résultat.....	55
--- VIII. — Résumé	61
ANNEXES	63

CHAPITRE PREMIER

Études antérieures

L'idée de construire des avions plus grands que ceux existants date déjà des premiers jours de l'aviation.

Lorsque l'expérience acquise avait permis d'établir certaines relations pratiques entre le poids total, la surface alaire et la puissance motrice, il semblait logique de supposer qu'un agrandissement proportionnel de ces trois quantités permettrait d'augmenter la charge utile ou le rayon d'action dans des proportions analogues, sinon plus fortes.

Si ces premiers projets n'ont pas connu de réalisation immédiate, la faute en incombait à deux difficultés principales : La puissance des moteurs était très limitée — elle était d'environ 100 CV. dans les premières années et même maintenant ne dépasse pas 1.000 CV. — et l'agrandissement proportionnel rencontrait des difficultés de principe qui seront exposées plus loin.

La première difficulté n'existe plus depuis la réalisation des multimoteurs ; la subdivision de la puissance motrice présente par ailleurs de tels avantages au point de vue de la sécurité d'exploitation et de la répartition des charges, qu'elle se retrouve dans tous les projets récents de grands avions.

L'autre difficulté réside dans le fait que l'agrandissement d'un type d'avion, ayant fait ses preuves, ne peut être fait suivant des lois de simple proportionnalité géométrique. L'un des premiers qui aient étudié cette question est Lanchester. Dans l'article *The development of military aeroplanes*, paru dans le journal *Engineering* du 3 mars 1916, il considère deux avions géométriquement semblables et ayant même charge alaire. Il démontre que le poids de structure augmente beaucoup plus vite que le poids total, de sorte qu'il existe une limite assez peu élevée au-dessus de laquelle la charge utile deviendrait négative.

Rohrbach a continué cette étude sur une nouvelle base qui se trouve exposée dans les *Berichte und Abhandlungen der Wissenschaftlichen Gesellschaft für Luftfahrt*, tome X, 1922. Il propose — toujours pour des avions géométriquement semblables — d'augmenter la charge alaire proportionnellement aux dimensions linéaires. De ce fait, le poids à vide croît moins vite que suivant la méthode étudiée par Lanchester, et cela malgré l'augmentation plus forte de la puissance motrice qui s'impose à cause de la vitesse nécessaire plus grande pour la sustentation. L'accroissement correspondant des vitesses de décollage et d'atterrissage n'effraie pas cet auteur, qui prévoit le grand avion soit muni d'un train d'atterrissage perfectionné, permettant d'emmagasiner un travail de déformation beaucoup plus grand, soit sous la forme de l'hydravion, qui connaît beaucoup moins les difficultés de terrain.

Il nous semble que cette méthode constitue plutôt une méthode d'amélioration qu'un mode d'agrandissement, puisque l'augmentation de la charge alaire au maximum possible, au détriment des facilités de décollage et d'atterrissage, peut déjà

être intéressante à partir d'une certaine grandeur de l'avion, mais sans qu'elle soit pour cela fonction de la grandeur absolue de l'avion.

Citons encore une étude de Bader, *Die Vergrößerung der Flugzeuge*, parue dans la *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt* du 14 août 1926. L'auteur prend comme base les poids de détail de construction, relevés sur différents avions de même marque. En extrapolant par des lignes droites, il détermine les poids détaillés pour des avions plus grands. Cette extrapolation un peu simpliste n'est justifiée que dans une zone assez restreinte, au delà de laquelle elle ne peut plus servir de base pour une étude d'agrandissement.

Certains auteurs ont étudié la relation entre la finesse de la voilure et son poids de construction. Tel est l'objet d'un article de Baumer, *Zusammenhang zwischen Widerstandsverminderung und Gewichtszunahme*, paru dans la *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt* du 26 janvier 1924. L'auteur trouve qu'une augmentation de l'allongement de x % n'est intéressante qu'à condition que le poids de construction n'augmente pas de plus de $\frac{x}{2}$ % ; autrement, la résistance totale augmenterait.

Vogt, dans l'article *Das günstigste Seitenverhältnis*, paru dans la *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt* du 28 avril 1925, étudie l'influence de l'allongement de la voilure sur le poids des longerons et cherche la valeur optima. Toutefois, le calcul du poids des longerons en fonction de l'allongement est conduit d'une façon trop primitive pour qu'il puisse être généralisé.

Dans l'article *Ueber günstigste Holmhöhen im Zusammenhang mit den Biegemomenten und Querkraften* paru dans la *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt* du 28 avril 1925, le même auteur détermine la hauteur optima des longerons pour une aile de contour et de charge donnés. Les longerons se composent de deux semelles réunies par des diagonales à 45° . Le poids des barres est évalué à l'aide de la formule d'Euler, affectée d'un coefficient empirique qui tient compte du mode de construction, c'est-à-dire du matériau, de la section qui est une section en profilés ouverts, et des assemblages. Le résultat du calcul, abstraction faite de l'évaluation de poids, ne donne qu'une indication très vague pour une exécution pratique, puisque la hauteur théorique des longerons décroît jusqu'à zéro aux extrémités des ailes. Au lieu de rajouter, pour obtenir la rigidité et la hauteur de profil nécessaires, des membrures spéciales, il est certainement préférable d'augmenter la hauteur des longerons en ces endroits.

Bien plus nombreuses sont les publications qui traitent le calcul de résistance des éléments constitutifs de la structure. L'élément le plus intéressant au point de vue théorique est certainement le tube rond à paroi mince. La formule de Rankine, avec le coefficient de Résal, telle qu'elle est indiquée par exemple, dans *De la Harpe, Notes et formules de l'Ingénieur*, ou une formule analogue, mais avec des coefficients empiriques, ne peuvent pas être exactes, puisqu'elles négligent le voilement de la paroi. Ce phénomène a été étudié expérimentalement et les résultats ont été communiqués par Boileau dans son ouvrage *Application de la résistance des matériaux au calcul des avions*, Paris 1921.

D'autre part, Timoschenko, dans l'article *Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie* publié dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 1910 Tome 58, page 337, donne la démonstration d'une formule qui permet de calculer la charge critique d'un tube circulaire de faible longueur et à paroi mince et indique une relation critique entre le diamètre, la longueur et l'épaisseur de paroi ; au-dessous d'une certaine valeur, il y a flambage ; au-dessus, il y a voilement.

Les essais que nous avons entrepris n'ont pas confirmé les valeurs numériques que donnerait cette formule, ni la façon dont elle envisage le problème. D'autre

part, elle ne s'applique, comme les valeurs empiriques citées par Boilève, qu'au cas très spécial d'un tube très court et très mince, mais ne tient pas compte de l'influence mutuelle des efforts de compression, de flambage et de voilement qui se produisent dans le cas courant d'une membrure d'avion.

Les conditions de résistance mécanique des diverses parties de la structure, ainsi que les performances minima qu'il faut exiger d'un avion commercial, ont été l'objet, non seulement, de nombreuses études, mais aussi d'une réglementation internationale éditée par la Commission Internationale de Navigation Aérienne, (*Règlement des conditions minima de délivrance du Certificat de Navigabilité*, Paris 1925). Ce sont ces prescriptions qui nous ont servi de base pour les CHAPITRES III et V du présent travail.

CHAPITRE II

Définition du problème

L'intérêt commercial ne portera pas sur l'agrandissement du poids total, ni des dimensions de l'avion, mais uniquement sur l'augmentation de la charge marchande, à condition qu'elle puisse être transportée sur une distance et avec une vitesse commerciale suffisantes.

La charge marchande P_m comprend les passagers et les bagages, tandis que le poids de l'équipage nécessaire à la conduite de l'avion (pilotes, mécaniciens, navigateurs, opérateurs de T. S. F.) — ainsi que le poids de l'équipement (T. S. F., instruments de navigation, etc...) formera, avec le poids de construction de l'avion, le poids équipé P_e . Le complément au poids total P_t sera le poids du combustible P_c , qui comprendra toute la charge qui diminue avec la durée du vol, c'est-à-dire normalement, l'essence et l'huile

$$(1) \quad P_t = P_e + P_m + P_c.$$

La proportion entre P_m et P_c est sujette à différentes hypothèses, suivant que l'on cherche à augmenter surtout la charge marchande P_m , la distance franchissable sans escale D ou la vitesse commerciale V_c .

L'expérience a démontré que la vitesse commerciale présente un intérêt plus grand pour l'exploitation que l'on n'avait pensé au début, malgré que la vitesse des avions les plus lents soit déjà bien supérieure à celle des autres moyens de transport. Il nous semble donc logique de choisir comme grandeur caractéristique, pour laquelle nous chercherons les possibilités d'agrandissement, le produit de la charge marchande, de la distance franchissable sans escale et d'une fonction de la vitesse commerciale, produit que nous appelons la « Capacité de Transport ».

$$(2) \quad T = P_m \times D \times f(V_c).$$

Pour $f(V_c)$ nous prenons la valeur qui avait été adoptée par l'Aéro-Club de France dans la formule de classement du Grand Prix des Avions de Transport de 1924

$$(3) \quad f(V_c) = \sqrt{V_c}.$$

La distance D dépend, d'une part, de la vitesse commerciale, d'autre part, de la quantité de combustible emportée et de la consommation. Si Π est la puissance des groupes motopropulseurs, exprimée en chevaux-vapeur, et c la consommation en kilogrammes par cheval-heure, on a

$$D = \int_0^{t_1} V_c dt; \quad -dP = \Pi c dt; \quad dt = -\frac{dP}{\Pi c}.$$

et la distance en kilomètres pour V_c en m/sec.

$$(4) \quad D = 3,6 \int_{P_t - P_c}^{P_t} \frac{V_c}{\Pi c} dP.$$

Pour c nous adoptons la valeur fixe de 0,25 kgs/CV-heure ; l'expression de la « Capacité de Transport » devient alors

$$(5) \quad T = 14,4 P_m \int_{P_t - P_c}^{P_t} \frac{V_c^{3/2}}{\Pi} dP.$$

Cette expression contient plusieurs variables qui — pour le moment, sont encore indépendantes les unes des autres : Le poids total et ses composantes, la vitesse commerciale et la puissance motrice. Dans l'étude qui suit, nous avons essayé de relier ces différentes variables par des expressions mathématiques qui sont basées, d'une part sur des considérations aérodynamiques, d'autre part, sur le calcul du poids de construction ; ce dernier sera surtout fonction de la répartition des charges et de l'allongement de la voilure.

CHAPITRE III

Étude de la répartition des charges

Dans les avions du type actuel, le poids de construction se compose essentiellement :

- 1° Du poids de la voilure ;
- 2° Du poids des groupes moto-propulseurs ;
- 3° Du poids du reste de la construction (empennage, atterrisseurs, poutres de liaison, commandes, etc...).

Pour déterminer le poids de la voilure, il y a lieu d'étudier trois parties assez distinctes :

a) La poutre principale, dont la résistance, donc le poids nécessaire, dépend, non seulement de la surface et de la charge alaire, mais aussi de la répartition des charges et de l'allongement de la voilure ;

b) Les poutres secondaires (nervures, bordures, etc.), dont le poids dépend surtout de la surface, dans une certaine mesure aussi de la charge alaire, mais pratiquement pas du tout de l'allongement, et ;

c) Le recouvrement — souple ou rigide — dont le poids est pratiquement proportionnel à la surface, indépendamment des autres caractéristiques de la voilure.

Pour diminuer le poids de la poutre principale, on aura intérêt à équilibrer toutes les forces extérieures aussi directement que possible, de façon à éviter la transmission de grands efforts locaux d'une partie de la poutre à l'autre, ce qui nécessiterait des éléments de forte section. Au lieu de concentrer toute la charge dans un fuselage unique, il faudrait donc la répartir sur toute l'envergure, en fonction de la sustentation.

Toutefois, à l'atterrissage, les conditions sont totalement changées. Avec le système actuel d'atterrisseurs, on ne peut pas compter sur plus de deux points d'appui sur le sol. Pour obtenir que la fatigue maxima de la poutre principale soit la même en vol et à l'atterrissage, compte tenu des facteurs de charge à appliquer, il faudra donc répartir sur la voilure une partie seulement du poids total et concentrer le reste au droit des deux atterrisseurs.

Ces considérations nous ont fait adopter comme type d'avion, le *monoplan à profil épais*, qui permet de loger des charges importantes à l'intérieur de l'aile.

En vol normal, la poutre est soumise à deux systèmes de forces :

$$\begin{array}{l} \text{Les forces verticales.} \left\{ \begin{array}{l} \uparrow \text{ Sustentation,} \\ \downarrow \text{ Poids de la structure} \\ \quad \text{et du chargement.} \end{array} \right. \\ \\ \text{Les forces horizontales.} \left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \text{ Tractions des hélices.} \\ \rightarrow \text{ Trainée.} \end{array} \right. \end{array}$$

Les forces verticales sont de beaucoup les plus importantes. Déterminons d'abord leur répartition. Celle de la sustentation a souvent été l'objet de recherches dans les laboratoires aérodynamiques. En mesurant la pression sur les deux faces de l'aile en un grand nombre de points, on peut tracer des « lignes de niveau » et déterminer la répartition de la sustentation, aussi bien dans le sens de l'envergure que dans le sens de la profondeur. Cette méthode qui doit être répétée pour plusieurs angles d'incidence, nous a paru trop compliquée pour être étendue sur les différentes formes d'ailes qui nous intéressent. Aussi, avons-nous imaginé une autre méthode qui donne directement le moment fléchissant dans le plan de symétrie de la voilure, c'est-à-dire la grandeur la plus intéressante pour les calculs de résistance :

L'aile a été coupée au milieu et munie d'une charnière à cet endroit. En mesurant le couple produit par la sustentation autour de cette charnière, on a pu déterminer le centre de pression de la demi-voilure, pour différents angles d'incidence.

Le tableau (fig. 1) donne le résumé de ces essais qui ont été exécutés, sur notre demande, au laboratoire aérodynamique de Vienne et dont le mode opératoire est expliqué dans l'Annexe I. On voit que la position du centre de pression de la demi-surface est assez variable suivant l'incidence et le contour de l'aile, mais que la position moyenne, pour des angles de 0 à 12° se trouve à peu près au droit du centre de gravité de cette même surface. Il n'y a donc pas lieu de remplacer dans notre étude, la répartition uniforme par une répartition plus compliquée.

Pour déterminer la répartition dans le sens de la profondeur, de même que pour l'intensité des efforts aérodynamiques, il est nécessaire de considérer plusieurs cas différents. Il nous a semblé logique — même dans cette étude théorique — de nous conformer aux conditions de calculs imposés par la Commission Internationale de Navigation Aérienne pour les avions commerciaux d'un poids supérieur à 5 tonnes :

1° Vol avec un angle d'incidence correspondant à la position la plus avancée du centre de pression. Facteur de charge : 5 ;

2° Vol avec un angle d'incidence correspondant à la position la plus reculée du centre de pression. Facteur de charge : 3,75 ;

3° Vol piqué avec la vitesse limite. Facteur de charge : 1,5 ;

4° Atterrissage brutal. Facteur de charge : 6.

Pour mettre ces conditions sous forme mathématique, il est nécessaire de connaître certaines caractéristiques aérodynamiques de l'avion et de la voilure seule.

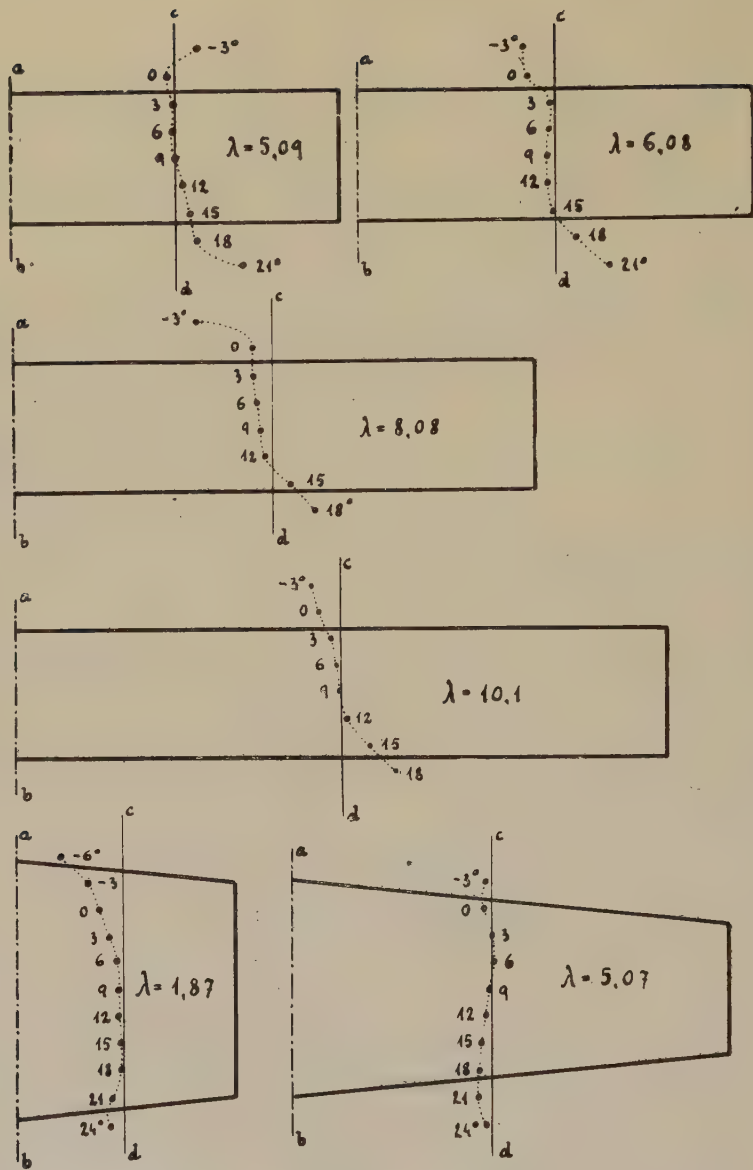
Pour un monoplan à aile épaisse, permettant de loger des charges à l'intérieur, il faudra choisir un profil d'une épaisseur relative d'environ 20 à 25 %. Si la courbure moyenne n'est pas trop forte, le coefficient de moment, d'après les nombreux essais des Laboratoires Eiffel, Saint-Cyr, Göttingen, etc..., peut être représenté par

$$(6) \quad C_m = 0,06 + 0,25 C_z$$

(Voir aussi à l'Annexe II la courbe des moments du profil E. 450).

La position la plus avancée possible du centre de pression (Cas N° 1) a lieu pour les fortes incidences. On peut évaluer à $C_z \approx 1,0$, la portance maxima pour le vol à l'extrême ralenti, ce qui donne

$$\frac{C_m}{C_z} = 0,06 + 0,25 = 0,31.$$



Les traits mixtes a-b indiquent la position de la charnière (plan de symétrie de l'aile), Les traits pleins c-d la position du centre de gravité de la demi-surface.

FIG. 1.

La position la plus reculée (Cas N° 2) est obtenue pour la vitesse maxima, pour laquelle C_z peut descendre jusqu'à environ 0,25 ce qui donne

$$\frac{C_m}{C_x} = 0,24 + 0,25 = 0,49$$

Les positions extrêmes du centre de pression, seront donc à 31 % et à 49 % de la profondeur.

Dans le cas N° 3, il s'agit de déterminer la résistance de l'avion dans la position où la sustentation de l'aile est voisine de zéro.

Nous avons fait essayer un grand nombre de maquettes complètes qui correspondaient sensiblement au type d'avion que nous envisageons dans cette étude, et dont la figure 2 donne un exemple. D'après ces essais, nous pouvons admettre :

Trainée minima de l'avion, sans hélices..... $C_x \text{ min} = 0,03$.

Trainée pour sustentation nulle..... $C_{x_0} = 0,05$.

En vol piqué, avec la vitesse limite, ce dernier chiffre se trouvera sensiblement augmenté par suite de la résistance des hélices formant moulinet.

Cette résistance est assez mal déterminée, puisque, jusqu'à présent, nous manquons d'essais de Laboratoire à ce sujet. Il semble donc permis de faire une approximation assez grossière, en assimilant l'hélice, dans le cas considéré, à un moulinet tournant fou. Pour les valeurs usuelles du rapport du pas au diamètre qui vont de 0,6 à 0,8, l'ouvrage de G. Eiffel, *Etudes sur l'hélice aérienne*, Paris, 1921, donne comme coefficient de résistance

$$\frac{F}{V^2 D^2} = 0,014 \text{ en moyenne,}$$

F étant la résistance en kg. pour V en mètres-seconde et D en mètres.

Nous pouvons admettre que le rapport de la surface balayée par les hélices à la surface alaire est de l'ordre de $1/10^e$ pour les avions multimoteurs, munis d'hélices démultipliées. On a donc

$$\Sigma \frac{\pi D^2}{4} = \frac{S}{10},$$

d'où

$$\Sigma D^2 = \frac{S}{2,5 \pi}$$

et

$$(7) \quad F = 0,014 V^2 \frac{S}{2,5 \pi} = 0,0018 S V^2.$$

Ceci correspond à une augmentation du coefficient de trainée de l'avion

$$\Delta C_x = \frac{F}{S \times \frac{1}{16}} = 0,029.$$

Pour le vol piqué (cas n° 3) à la vitesse limite, la sustentation s'annule, et le poids est équilibré par la trainée, donc

$$(8) \quad P_t = (0,05 + 0,029) \times S \times \frac{V_{\text{lim}}^2}{16}; \quad V_{\text{lim}} = 14,1 \sqrt{\frac{P_t}{S}}.$$

Ce qui donne pour

$$\begin{array}{cccccc} \frac{P_t}{S} = & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 \text{ kg/m}^2 \\ V_{\text{lim}} = & 99,5 & 109 & 118 & 126 & 134 \text{ m/sec.} \end{array}$$

Cette vitesse limite ne serait atteinte qu'après un temps et un parcours infinis. Comme les avions commerciaux ne dépassent guère une altitude de 2.000 mètres, il convient d'introduire dans le calcul de résistance la vitesse qu'aurait l'avion en arrivant au sol, après avoir piqué verticalement.

Pour le mouvement vertical, le chemin parcouru s sera donné par la relation

$$\begin{aligned} VdV &= \frac{P_t - 0,08 S \times \frac{V^2}{16}}{P_t/g} ds, \\ \frac{VdV}{g} &= \left(1 - \frac{S}{P_t} \times \frac{V^2}{200}\right) ds, \\ -\frac{VdV}{SV^2} &= 9,81 ds; \quad s = 20,4 \frac{P_t}{S} \times \log \text{ nep} \frac{1}{1 - \frac{SV^2}{200 P_t}} = 2000 \text{ m}; \end{aligned}$$

d'où

$$(9) \quad \log \text{ nep} \frac{1}{1 - \frac{SV^2}{200 P_t}} = 98 \frac{S}{P_t},$$

c'est-à-dire pour

$$\begin{array}{cccccc} \frac{P_t}{S} = & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 \\ V = & 92,5 & 98,3 & 102,8 & 106,6 & 109,5 \end{array}$$

Le rapport de ces vitesses limites aux limites théoriques indiquées plus haut est

$$\frac{V}{V_{\text{lim}}} = 0,93 \quad 0,90 \quad 0,87 \quad 0,85 \quad 0,82$$

soit en moyenne 88 %.

Le moment de torsion qui agit sur la voilure de surface S et de profondeur p sera

$$C = S \times p \times C_{mo} \times \frac{V^2}{16},$$

ce qui donne, avec $C_{mo} = 0,06$ (voir l'équation N° 6) et

$$V = 0,88 V_{\text{lim}} = 12,4 \sqrt{\frac{P_t}{S}} :$$

$$(10) \quad C = S \times p \times 0,06 \times \frac{12,4^2}{16} \times \frac{P_t}{S} \approx 0,6 P_t \times p.$$

Dans le 4° cas (atterrissage brutal), l'effort sera dû au poids W constituant la fraction du poids total P_t qui est répartie uniformément sur la surface S .

Les efforts dans le plan de la voilure, créés par les forces horizontales, seront relativement faibles dans le type d'avion envisagé. En effet, dans le cas n° 3 qui, généralement, donne des efforts considérables, la résistance est sensiblement répartie de la même façon que le poids : A l'endroit des moteurs s'exerce la résistance des hélices, et les extrémités de la voilure sont moins chargées que la partie centrale sur laquelle s'exercera la résistance des atterrisseurs et de l'empennage.

Nous supposons que la poutre principale est constituée par deux longerons. Au point de vue constructif, il sera intéressant de leur donner la même hauteur et de les disposer de façon à ce qu'ils subissent les mêmes efforts maxima. Ils auront, par conséquent, la même section et, pour les efforts courants — vol normal et atterrissage, — leur déformation sera la même : La voilure fléchira sans se tordre, ce qui évite certains efforts dangereux dans les membrures.

Avec les notations de la figure 3, et en appliquant les facteurs de charge précités, nous obtenons les charges sur les longerons AV. et AR. pour les quatre cas

Cas N°	Longeron AV	Longeron AR
1	$5 P_t \frac{b - 0,31 p}{d} - 2,5 W$	$5 P_t \frac{0,31 p - a}{d} - 2,5 W$
2	$3,75 P_t \frac{b - 0,49 p}{d} - 1,875 W$	$3,75 P_t \frac{0,49 p - a}{d} - 1,875 W$
3	$-0,90 P_t \frac{p}{d}$	$+0,90 P_t \frac{p}{d}$
4	$-3 W$	$-3 W$

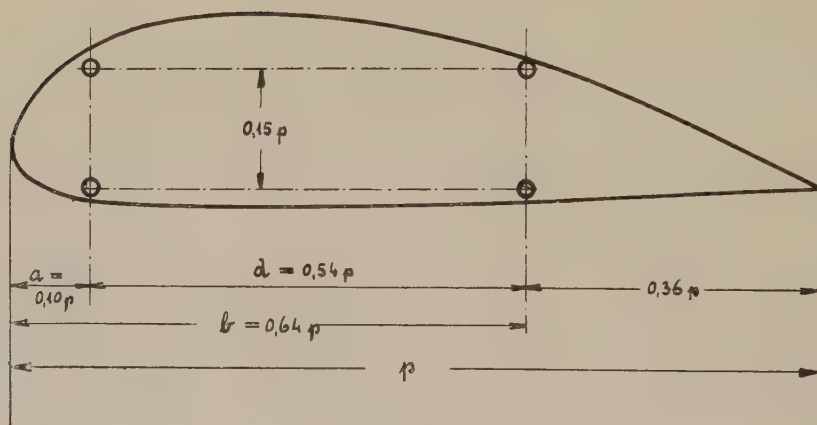


FIG. 3.

L'égalité des charges maxima sur le longeron avant, dans les cas n° 3 et n° 4, donne

$$-0,90 P_t \frac{p}{d} = -3 W;$$

$$W = 0,30 P_t \frac{p}{d};$$

l'égalité entre les charges, dans les cas n^{os} 1 et 4, donne

$$5 P_t \frac{b - 0,31 p}{d} - 0,75 P_t \frac{p}{d} = 0,90 P_t \frac{p}{d},$$

d'où

$$(12) \quad b = 0,640 p$$

et l'égalité entre les charges sur le longeron arrière, dans les Cas n^{os} 2 et 4

$$3,75 P_t \frac{0,49 p - a}{d} - 0,563 P_t \frac{p}{d} = 0,90 P_t \frac{p}{d};$$

d'où

$$(13) \quad a = 0,101 p.$$

Il en résulte

$$(14) \quad d = b - a = 0,539 p$$

et

$$(15) \quad W = \frac{0,30 P_t}{0,539} = 0,56 P_t.$$

La charge maxima sur un longeron sera donc :

$$(16) \quad 3 \times 0,56 P_t = 1,68 P_t.$$

En répartissant 56 % du poids total sur la voilure, proportionnellement à la surface, le taux de travail sera le même dans les quatre cas envisagés, mais le moment fléchissant maximum dépend encore de l'emplacement du restant de la charge, c'est-à-dire des 44 % du poids total.

Il convient de préciser ici dans quelle mesure la charge W peut être constituée par une charge variable telle que, par exemple, le combustible. Pour ne pas augmenter les efforts en vol, il faut que la différence entre la charge alaire q_t et la charge uniformément répartie $0,56 q_t$ ne soit pas dépassée en cas de délestage

$$q_t - 0,56 q_t = 0,44 q_t.$$

Si nous appelons q_c la charge alaire locale due au poids de combustible, il vient

$$q_t \frac{P_t - P_c}{P_t} - (0,56 q_t - q_c) = 0,44 q_t$$

d'où

$$(17) \quad q_c = q_t \frac{P_c}{P_t} = \frac{P_c}{S},$$

c'est-à-dire la charge variable ne doit excéder, en aucun point, celle qui correspondrait à une répartition uniforme sur toute la surface alaire.

Pour diminuer le moment fléchissant maximum, on a intérêt à diminuer la profondeur des ailes vers les extrémités. Toutefois, le rapport entre les profondeurs au centre et aux extrémités est limité : d'une part, des extrémités trop effilées tendraient à vibrer et, d'autre part, la finesse, pour une surface et une envergure données, diminuerait, ainsi que l'ont démontré les essais exécutés au Laboratoire de Göttingen avec une aile en forme de losange (*Ergebnisse der Aerodynamischen*

Versuchsanstalt zu Göttingen, tome I, 1921). En conséquence, nous adopterons, pour la diminution de la profondeur vers les extrémités, la valeur moyenne de 1 : 2, pour laquelle les essais faits au Laboratoire de l'Université de Toronto (*Bulletin* n° 4, 1924) n'ont pas révélé de diminution de la finesse, qui sera donc uniquement fonction de l'allongement

$$\lambda = \frac{4e^2}{S}$$

e étant la demi-envergure et S la surface.

Pour conserver le profil maximum jusqu'aux endroits où se produit le moment fléchissant maximum, il y a lieu d'intercaler, entre deux ailes trapézoïdales, une partie centrale à section constante, dont la longueur sera égale à la distance entre les deux atterrisseurs. C'est en ces deux endroits que sera concentrée la charge de $0,44 P_t$.

Avec les notations de la figure 4, on a

$$S = \frac{P_0}{2} (3e + x).$$

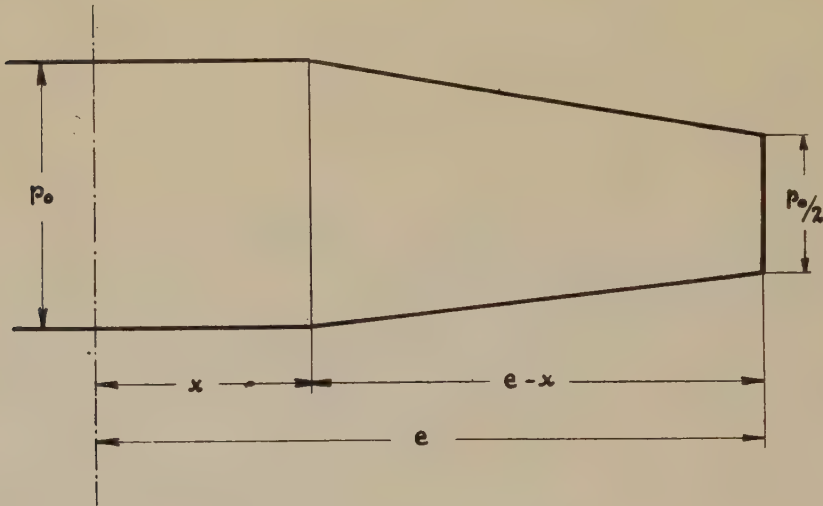


FIG. 4.

La considération qui donnera la distance limite est la suivante : L'avion touche le sol avec un seul atterrisseur et le couple qui en résulte est équilibré par l'inertie de l'appareil autour de son axe longitudinal. En appliquant un facteur de charge de 5, la réaction du sol sur l'atterrisseur en action sera

$$5 \times \frac{P_t}{2} = 2,5 P_t.$$

Cette force et son couple autour du centre de gravité

$$2,5 P_t \times x_1$$

seront équilibrés par les forces d'inertie. Le moment d'inertie autour de l'axe longi-

tudinal se compose de celui de la voilure avec la charge uniformément répartie et de celui des deux charges concentrées au droit des atterrisseurs :

$$I_1 = \frac{0,56 P_t}{g} \times \frac{2}{p_0 (3e \times x_1)} \times 2 \left[\frac{1}{3} p_0 x_1^3 + \int_{x_1}^e p_0 \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{x - x_1}{e - x_1} \right) x^2 dx \right] =$$

$$= 0,0933 \frac{P_t}{g} \frac{5e^3 - e^2 x_1 + e x_1^2 + x_1^3}{3e + x_1};$$

$$I_2 = 0,44 \frac{P_t}{g} x_1^2.$$

L'accélération linéaire sera

$$\gamma = \frac{2,5 P_t}{P_t/g} = 2,5 g$$

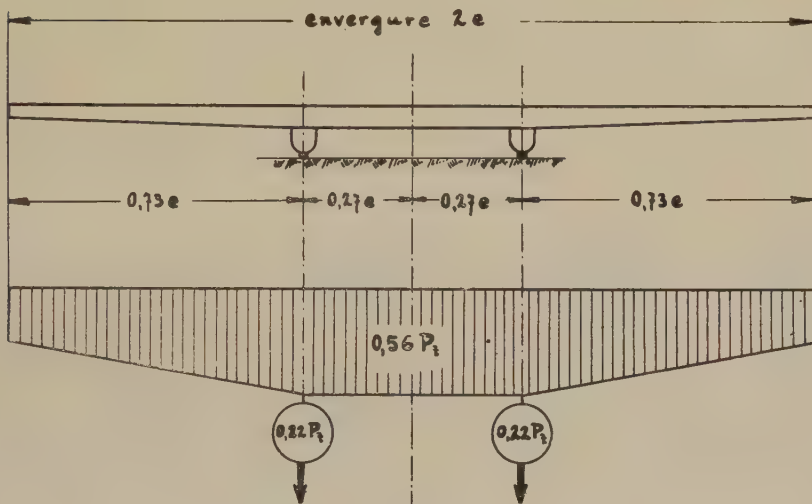


FIG. 5.

et l'accélération angulaire

$$(18) \quad \lambda = \frac{2,5 P_t \times x_1}{I_1 + I_2},$$

Considérons maintenant une section de voilure située près de l'extrémité de l'aile, du côté de l'atterrisseur en action. En comptant 5 % de la demi-envergure pour la bordure de l'aile, où la charge locale, donc la force d'inertie, est très faible, la section dangereuse est à une distance de 0,95e du centre de l'avion. L'accélération totale ne doit pas dépasser celle dans le cas n° 4, pour laquelle la voilure a été établie, c'est-à-dire

$$\lambda \times 0,95e + 2,5 g = 6 g.$$

d'où

$$\lambda = 3,68 \frac{g}{e}.$$

Cette relation introduite dans l'équation (18) donne la valeur limite pour l'écartement des atterrisseurs :

$$3,68 \frac{g}{e} = \frac{2,5 P_t x_1}{I_1 + I_2};$$

$$0,680 \frac{P_t}{g} e x_1 = I_1 + I_2 = \frac{P_t}{g} \times \frac{0,467 e^3 + 0,093 e^2 x_1 + 1,413 e x_1^2 + 0,533 x_1^3}{3e + x_1};$$

$$x_1^3 + 1,375 e x_1^2 - 3,650 e^2 x_1 + 0,875 e^3 = 0;$$

$$(19) \quad x_1 = 0,27 e.$$

La figure 5 donne le schéma de l'avion ; la répartition des charges étant déterminée, il est possible de calculer les moments fléchissants et les efforts tranchants dans les longerons à l'extérieur des atterrisseurs. Dans la partie centrale, la fatigue maxima est assez mal déterminée ; elle résulte des efforts dissymétriques dans les virages et en roulant au sol. Nous admettons — ce qui est d'ailleurs recommandable pour des raisons constructives — que la section maxima de la poutre, au droit des atterrisseurs, est conservée dans toute la partie centrale.

CHAPITRE IV

Calcul du poids de construction

Pour déterminer les sections nécessaires et le poids des longerons, il faut connaître les caractéristiques du matériau employé et la façon dont il travaille.

L'extension simple n'interviendra pas dans nos calculs, puisque la fatigue maxima sera la même dans les deux sens et que l'effort de compression est celui qui nécessitera une section plus forte. Avec les profils à paroi mince, employés en aviation, il est, en effet, nécessaire de prévoir un flambage ou un voilement, suivant la longueur libre de la pièce. Nous étudierons en conséquence, comme élément de construction, le tube circulaire, dont l'épaisseur de paroi e est faible par rapport à son diamètre $2r$.

Si l'on comprime un tronçon dont la longueur est suffisamment petite pour

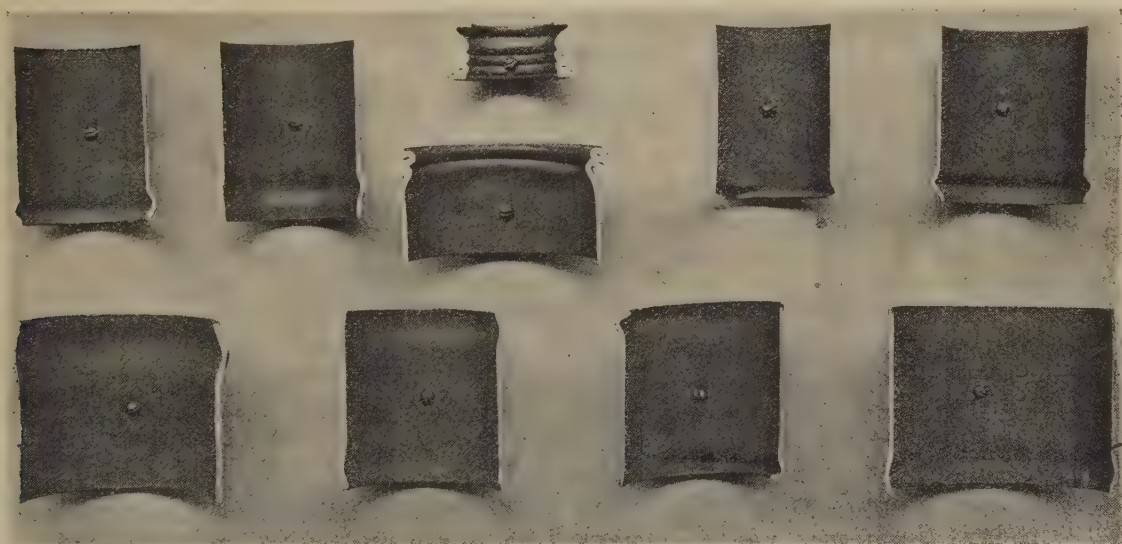


FIG. 6.

qu'il n'y ait pas flambage, il se forme, à partir d'une certaine charge critique Q , un pli circulaire assez régulier, auquel succède, après aplatissement complet, un deuxième, puis un troisième et ainsi de suite (fig. 6). Ce voilement, vu en coupe, ressemble assez au flambage ordinaire d'une barre mince (fig. 7).

Admettons, comme c'est le cas dans la formule d'Euler, que la déformée au moment de l'instabilité soit une sinusoïde, et supposons que le tube est composé

de petits éléments de largeur b (fig. 8). Par suite de la courbure, le moment fléchissant sera

$$M = - \frac{d^2 y}{dx^2} EI,$$

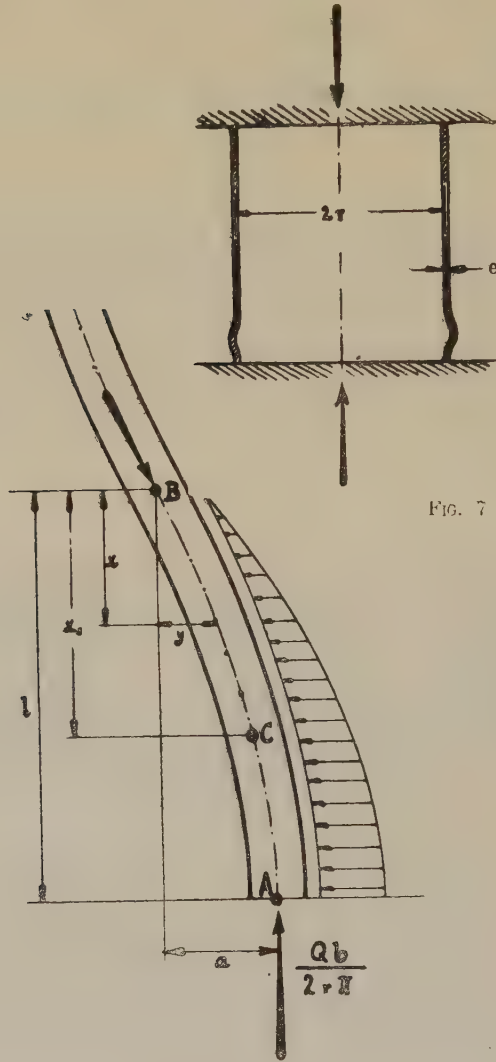


FIG. 7

FIG. 8.

où E = coefficient d'élasticité ; I = moment d'inertie axial ; pour la sinusoïde, on a

$$y = a \sin \frac{x\pi}{2l},$$

x , y et l ayant les significations indiquées sur la figure 8, donc

$$M_1 = \frac{aEI\pi^2}{4l^2} \sin \frac{x\pi}{2l},$$

avec

$$I = \frac{1}{12} b e^3.$$

D'autre part, l'agrandissement ou la diminution du diamètre du tube, résultant de la déformation sinusoïdale, créera des efforts tangentiels, qui seront proportionnels à l'écartement de la position initiale et tendront à redresser la paroi (fig. 9). Pour un élément de longueur dx , l'effort tangentiel sera

$$dt = E \frac{y}{r} e dx$$

et la résultante radiale agissant sur un secteur d'ouverture α

$$x dt = E \frac{y b}{r^2} e dx.$$

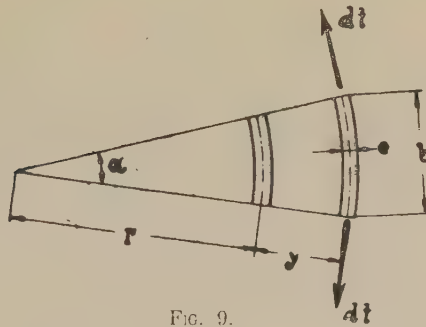


FIG. 9.

Evaluons maintenant les moments qui agissent sur la partie AC d'un élément de tube. Les efforts radiaux xdt donneront un moment autour de C

$$M_2 = \int_0^{x_1} E \frac{y b}{r^2} e dx (x_1 - x) = \frac{4 a e b E l^2}{r^2 \pi^2} \sin \frac{x_1 \pi}{2l}.$$

L'effort de compression longitudinale sur l'élément de largeur b donnera un moment

$$M_3 = - \frac{Q b}{2 r \pi} y = - \frac{Q b}{2 r \pi} a \sin \frac{x \pi}{2l}.$$

En B (point d'inflexion), le moment fléchissant est nul, mais en C, il a la valeur M_1 . Pour la charge critique, les trois moments seront en équilibre

$$M_1 + M_2 + M_3 = 0;$$

$$\frac{a E b e^3 \pi^2}{48 l^2} \sin \frac{x \pi}{2l} + \frac{4 a e b E l^2}{r^2 \pi^2} \sin \frac{x \pi}{2l} - \frac{Q b a}{2 r \pi} \sin \frac{x \pi}{2l} = 0,$$

d'où

$$(20) \quad Q = \frac{8 E e l^2}{r \pi} + \frac{E e^3 r \pi^2}{24 l^2}.$$

Cette expression contient la longueur inconnue l . Il semble logique d'admettre qu'elle sera telle que la résistance Q devient un minimum

$$\frac{dQ}{dl^2} = 0 = \frac{8Ee}{r\pi} - \frac{Ee^3 r \pi^3}{24l^4}$$

$$l^4 = \frac{\pi^4 e^3 r^2}{192}; \quad l = 0,845 \sqrt{er}.$$

Dans les essais de laboratoire (voir l'Annexe), nous avons trouvé environ $0,9 \sqrt{er}$. Avec la valeur théorique, l'expression pour la charge critique devient

$$(21) \quad Q = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} Ee^2.$$

Cette formule ne tient compte que de l'élasticité du matériau sans s'occuper de la limite élastique; elle pourrait être valable tout au plus pour les cas où e^2 est très petit par rapport à la section $\Omega = 2\pi re$, c'est-à-dire pour le cas d'un tube à paroi extrêmement mince. Il y a une certaine analogie avec la formule d'Euler

$$Q_e = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Pour tenir compte de la compression qui devient d'autant plus importante que la barre est plus courte, on raccorde l'hyperbole correspondant à la formule d'Euler, qui donne une valeur infiniment grande pour $l = 0$, avec la droite représentant la résistance à la compression simple, par une courbe empirique, en posant

$$Q = R\Omega \left(1 - \frac{Q}{\frac{\pi^2 EI}{l^2}} \right)$$

d'où la formule de Rankine

$$Q = \frac{R\Omega}{1 + \frac{R}{\pi^2 E} \times \frac{\Omega l^2}{I}}$$

(R = résistance à la compression).

Dans le cas du tube circulaire à paroi mince, on a

$$I = r^3 \pi e; \quad \Omega = 2r \pi e;$$

$$(22) \quad Q_1 = \frac{R\Omega}{1 + \frac{2R}{\pi^2 E} \left(\frac{l}{r} \right)^2}.$$

Appliquons la même méthode au voilement, tel qu'il est défini au commencement de ce chapitre (voir aussi fig. 6); avec la valeur critique $\frac{2\pi}{\sqrt{3}} Ee^2$, il vient

$$Q = R\Omega \left(1 - \frac{Q}{\frac{2\pi}{\sqrt{3}} Ee^2} \right) = \frac{R\Omega}{1 + \frac{R\sqrt{3}}{2\pi E} \times \frac{\Omega}{e^2}}$$

$$\Omega = 2r \pi e; \quad Q = \frac{R\Omega}{1 + \frac{R}{E} \sqrt{3} \frac{r}{e}}.$$

Les essais de laboratoire (voir l'Annexe) nous ont donné un coefficient d'environ 3 au lieu de $\sqrt{3}$

$$(23) \quad Q_2 = \frac{RQ}{1 + 3 \frac{R}{E} \times \frac{r}{e}}.$$

Ces expressions pour Q_1 et Q_2 constituent des valeurs limites, l'une pour un tube relativement épais et long, qui ne risque pas de se voiler, l'autre pour un tube

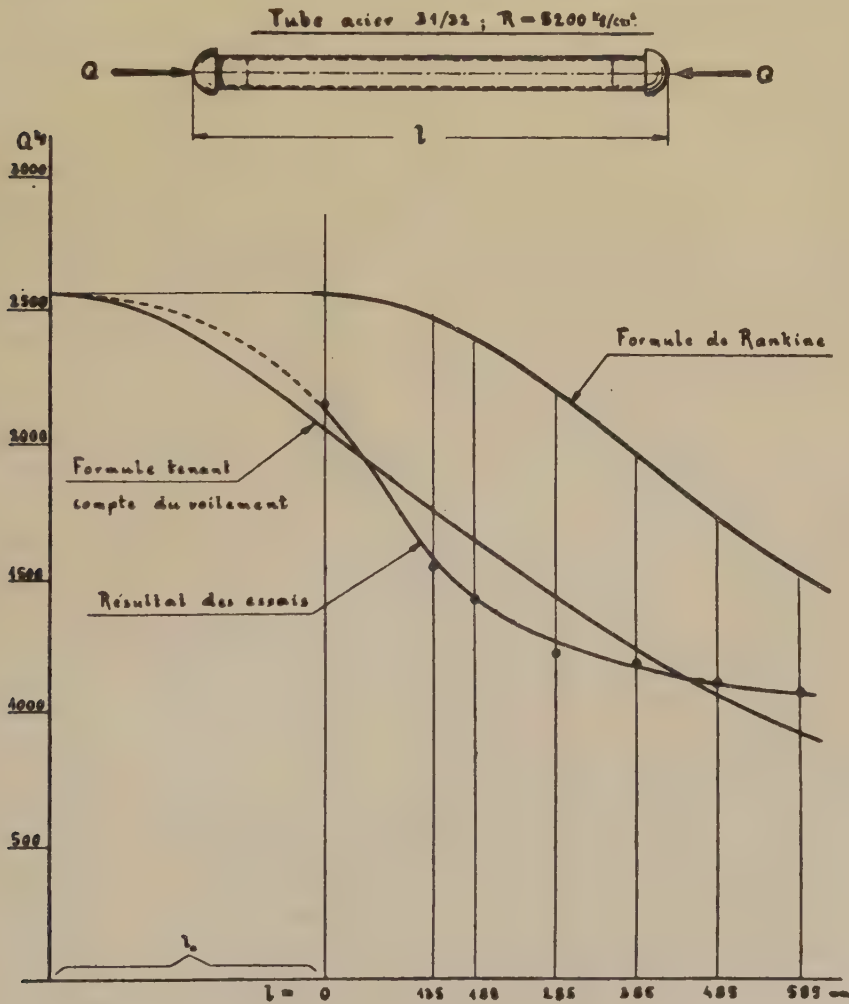


FIG. 10.

relativement court et mince, qui ne risque pas de flamber. Il est nécessaire de combiner les deux formules. Les essais de compression exécutés avec des tubes de même section, mais de longueurs différentes, dont les extrémités étaient munies d'embouts hémisphériques, nous ont donné la courbe indiquée sur la figure 10. Son allure générale nous a amenés à mettre l'expression générale pour la résistance

sous la forme d'une formule de Rankine, dans laquelle on ajoute à la longueur l du tube une longueur fictive l_0 , qui dépend de l'épaisseur relative de la paroi $\frac{e}{r}$:

$$Q = \frac{R\Omega}{1 + \frac{2R}{\pi^2 E} \left(\frac{l_0 + l}{r} \right)^2}.$$

Pour le cas $l = 0$, on doit avoir $Q = Q_0$ et

$$\frac{2R}{\pi^2 E} \left(\frac{l_0}{r} \right)^2 = 3 \frac{R}{E} \times \frac{r}{e},$$

d'où

$$(24) \quad l_0^2 = \frac{3\pi^2}{2} \times \frac{r^3}{e} = \frac{3\pi}{4} \Omega \left(\frac{r}{e} \right)^2; \quad l_0 = 1,54 \frac{r}{e} \sqrt{\Omega}.$$

La formule générale pour Q permet de déterminer la valeur optima de l'épaisseur relative de la paroi, pour obtenir le maximum de résistance avec une section et une longueur données. Il faut, pour cela, que l'expression entre parenthèses $\frac{l_0 + l}{r}$ devienne un minimum

$$\frac{d}{dr} \left(1,54 \frac{\sqrt{\Omega}}{e} + \frac{l}{r} \right) = \frac{d}{dr} \left(1,54 \frac{2\pi r \sqrt{\Omega}}{\Omega} + \frac{l}{r} \right) = 0;$$

$$\frac{3,08\pi}{\sqrt{\Omega}} - \frac{l}{r^2} = 0; \quad r = \sqrt{\frac{l\sqrt{\Omega}}{3,08\pi}} = 0,321 \sqrt{l\sqrt{\Omega}};$$

$$\frac{r}{e} = \frac{2\pi r^2}{\Omega} = \frac{l}{1,54\sqrt{\Omega}}; \quad l_0 = l;$$

$$Q = \frac{R\Omega}{1 + \frac{2R}{\pi^2 E} \times \frac{4l^2}{r^2}} = \frac{R\Omega}{1 + \frac{2R}{\pi^2 E} \times \frac{4l^2 \times 3,08\pi}{l\sqrt{\Omega}}};$$

Résistance à la rupture

$$(25) \quad Q = \frac{R\Omega}{1 + 7,85 \frac{R}{E} \times \frac{l}{\sqrt{\Omega}}}.$$

La section nécessaire serait donnée par la relation

$$\Omega = \frac{Q}{R} \left(1 + 7,85 \frac{R}{E} \times \frac{l}{\sqrt{\Omega}} \right).$$

Actuellement, deux métaux sont surtout employés en aviation :

Le duralumin, avec : $R = 4.000 \text{ kg./cm}^2$; $E = 800.000 \text{ kg./cm}^2$;
et un poids spécifique $\sigma = 2,85 \text{ kg./dm}^3$;

et l'acier haute résistance, avec : $R = 11.000 \text{ kg./cm}^2$; $E = 2.200.000 \text{ kg./cm}^2$;
 $\sigma = 7,85 \text{ kg./dm}^3$.

Pour ces deux métaux, les rapports $\frac{R}{E}$ et $\frac{R}{\sigma}$ sont sensiblement les mêmes, en moyenne

$$\frac{R}{E} = \frac{1}{200} \quad \text{et} \quad \frac{R}{\sigma} = 1400.$$

Ceci simplifie la formule pour Ω :

$$\Omega = \frac{Q}{R} \left(1 + 0,0393 \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \right).$$

Il est facile de démontrer que, dans ces conditions, le matériau le moins dense donne aussi le moindre poids

$$P = \Omega \sigma l = Q l \frac{\sigma}{R} \left(1 + 0,0393 \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \right).$$

$\frac{\sigma}{R}$ est constant et Ω est plus fort pour le matériau moins résistant et moins dense. Nous envisagerons donc, dans cette étude, pour toutes les barres, seulement le duralumin. La section nécessaire, d'après la formule précédente, serait déterminée par l'équation cubique

$$\Omega = \frac{Q}{4000} \left(1 + 0,0393 \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \right).$$

Elle donne, en fonction de Q et de l, les valeurs suivantes :

Q =	1.000	10.000	100.000 kgs.
l = 100 cm : $\Omega =$	1,16	6,4	41 cm ²
200 cm : $=$	1,74	9,1	52 cm ²
300 cm : $=$	2,24	11,4	63 cm ²

Ce calcul donne la section minima, à condition que le rapport du rayon à l'épaisseur de la paroi ait la valeur optima

$$\frac{r}{e} = \frac{1}{1,54 \sqrt{\Omega}}.$$

Or, cette valeur devient beaucoup trop élevée pour les faibles sections et les fortes longueurs, comme le montre le tableau suivant :

$\Omega =$	1	5	50 cm ²
l = 100 cm : $\frac{r}{e} =$	65	29	9
200 cm : $=$	130	58	18
300 cm : $=$	195	87	28

Des tubes dont l'épaisseur de paroi est seulement 1/100^e du diamètre seraient difficiles à réaliser, et les assemblages seraient, par suite du grand diamètre, relativement lourds.

Il y a donc lieu de renforcer les faibles sections pour pouvoir s'écarter du rapport optimum de $\frac{r}{e}$.

Puisque Q augmente plus vite que Ω , ce but sera atteint en remplaçant, dans

la formule de la section nécessaire, $\sqrt{\Omega}$ par $\sqrt{Q}$ et en adaptant les coefficients de façon à ce que, pour les grandes valeurs de Q , la section nécessaire devienne la même que celle donnée par la formule (25)

$$(26) \quad \Omega = \frac{Q}{3500} \left(1 + 0,0393 \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \right) = \frac{Q}{3500} + \frac{1\sqrt{Q}}{2700}$$

avec Ω en cm^2 ; Q en kgs et l en cms.

Cette formule, qui a l'avantage d'être explicite et de faire ressortir directement l'influence de la longueur, donne pour

$Q =$	1.000	10.000	100.000 kgs
$l = 100 \text{ cm} :$	$\Omega = 1,46$	6,5	41 cm^2
200 cm :	2,63	10,2	52 cm^2
300 cm :	3,80	13,9	64 cm^2

Pour appliquer cette formule aux longerons de la voilure, nous admettons que ceux-ci soient des poutres en treillis triangulaires, à assemblages articulés (fig. 11).

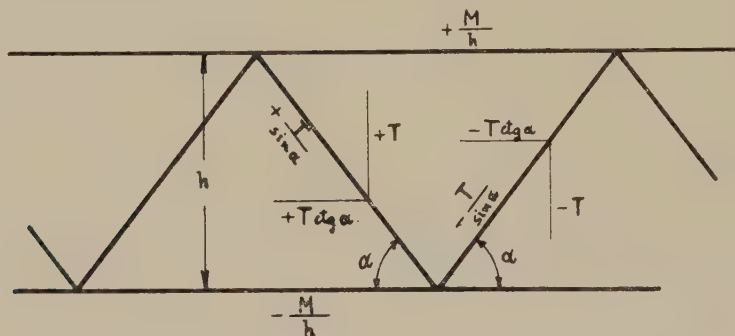


FIG. 11

Les efforts dans les barres d'une telle poutre sont faciles à déterminer, si la courbure de la poutre reste suffisamment faible. Cette condition n'étant pas remplie *a priori*, étudions d'abord les courbures produites par l'effort tranchant et le moment fléchissant.

Soit AB et BC (fig. 12), deux éléments consécutifs d'une poutre à section variable. Si T_1 et T_2 , S_1 et S_2 sont les efforts tranchants et les sections, les déformations angulaires seront

$$\varphi_1 = \frac{T_1}{GS_1} \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{T_2}{GS_2},$$

G étant le module de glissement, c'est-à-dire le rapport entre l'effort tranchant et le glissement, exprimé en radians, de deux sections distantes de l'unité.

La variation de l'angle de glissement donne la courbure de la poutre due à l'effort tranchant

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{G} \frac{d}{dx} \left(\frac{S}{T} \right) = \frac{1}{\rho_1}.$$

Dans le cas d'une poutre à treillis (fig. 11 et 13), le moment fléchissant produit un allongement ou un raccourcissement des semelles. Avec la section Ω_1 et le coefficient d'élasticité E on a

$$\frac{\Delta l_1}{l_1} = \frac{M}{hE\Omega_1},$$

d'où la courbure due au moment fléchissant

$$(27) \quad \frac{2M}{hE\Omega_1} \times \frac{1}{h} = \frac{1}{\rho_f}.$$

L'effort tranchant agit sur les croisillons, dont la longueur change suivant

$$\frac{\Delta l_2}{l_2} = \frac{T}{\sin \alpha \cdot E\Omega_2}.$$

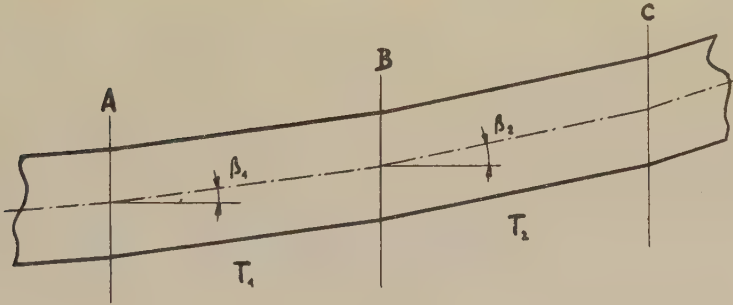


FIG. 12.

ce qui donne lieu à un glissement

$$\Delta y = \frac{2\Delta l_2}{\sin \alpha} = \frac{2Tl_2}{E\Omega_2 \sin^2 \alpha} = \frac{2Th}{E\Omega_2 \sin^2 \alpha}.$$

L'angle de glissement sera donc

$$\varphi = \frac{\Delta y}{l_1} = \frac{2Th}{E\Omega_2 l_1 \sin^2 \alpha}; \quad l_1 = 2h \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$\varphi = \frac{T}{E\Omega_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}$$

et la courbure due à l'effort tranchant

$$(28) \quad \frac{1}{\rho_t} = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{E} \times \frac{d}{dx} \left(\frac{T}{\Omega_2 \sin^2 \alpha \cos \alpha} \right).$$

Cette courbure peut être de même signe ou de signe contraire à celui de la courbure produite par le moment fléchissant, suivant que $\frac{T}{\Omega_2}$ (l'angle α étant considéré comme constant sur toute la longueur de la poutre), augmente ou diminue vers l'extrémité de l'aile.

C'est le deuxième cas qui se produit. En effet, d'après l'équation (26) qui donne la section nécessaire, on a

$$\frac{\Omega_2}{T} = \frac{1}{3500} + \frac{1}{\sqrt{T}} \times \frac{1}{2700}.$$

L'effort tranchant diminue jusqu'à 0 vers les extrémités, alors que les longueurs l des croisillons ne diminuent que dans le rapport de 2 : 1. Il en résulte que $\frac{1}{\sqrt{T}}$ augmente et que $\frac{T}{\Omega_2}$ diminue vers les extrémités.

Pratiquement, c'est la courbure due à l'effort tranchant qui sera la plus forte. Pour que la courbure résultante soit aussi faible que possible, il y aurait donc lieu de choisir l'angle α de façon à ce que le terme $\frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}$ auquel la courbure $\frac{1}{\rho_1}$

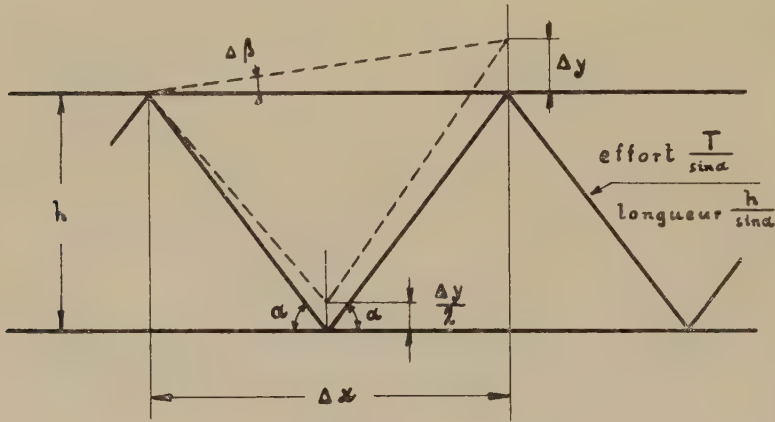


FIG. 13.

est proportionnelle, devienne un minimum

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} (\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha) &= 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin^3 \alpha = 0; \\ 2 \operatorname{ctg}^2 \alpha &= 1; \quad \alpha = 54^\circ 44'. \end{aligned}$$

Nous verrons qu'il y a lieu d'adopter un angle assez voisin pour d'autres raisons ; nous pourrions donc, dans cette étude générale, faire abstraction de la courbure résultante de la poutre et déterminer les efforts dans les barres du treillis, comme s'il n'y avait pas de déformation.

Comme il a été dit plus haut, nous calculons toutes les barres à la compression. La section nécessaire des semelles est

$$(29) \quad \Omega_1 = \frac{M}{h} \times \frac{1}{3500} + \frac{2}{2700} h \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\frac{M}{h}}$$

et celle des croisillons

$$(30) \quad \Omega_2 = \frac{T}{3500 \sin \alpha} + \frac{1}{2700} \times \frac{h}{\sin \alpha} \sqrt{\frac{T}{\sin \alpha}}.$$

Le volume du longeron par unité de longueur sera représenté par la section fictive

$$(31) \quad \Omega = 2 \Omega_1 + \frac{\Omega_2}{\cos \alpha} =$$

$$= \frac{1}{1750} \times \frac{M}{h} + \frac{1}{675} h \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\frac{M}{h}} + \frac{T}{3500 \sin \alpha \cos \alpha} + \frac{h}{2700 \sin \alpha \cos \alpha} \sqrt{\frac{T}{\sin \alpha}}.$$

Le minimum absolu est assez difficile à déterminer ; aussi, nous contenterons-nous de déterminer le minimum de $\frac{\Omega_2}{\cos \alpha}$. Si les croisillons travaillaient en compression simple, la section fictive serait

$$\frac{\Omega_2}{\cos \alpha} = \frac{T}{3500 \sin \alpha \cos \alpha}$$

et le minimum serait obtenu pour $\alpha = 45^\circ$; si, au contraire, le terme du flambage était prépondérant, on aurait

$$\frac{\Omega_2}{\cos \alpha} = \frac{h}{2700 \sin \alpha \cos \alpha} \sqrt{\frac{T}{\sin \alpha}}$$

$$\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{\Omega_2}{\cos \alpha} \right) = 0; \quad -\frac{3}{2} \sin^{-\frac{5}{2}} \alpha + \sin^{-\frac{1}{2}} \alpha \cdot \cos^{-2} \alpha = 0; \quad \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{3}{2}; \quad \alpha = 50^\circ 46';$$

l'angle optimum sera donc compris entre 45 et 54° . En prenant la valeur moyenne de 50° , le volume du longeron pour l'unité de longueur devient

$$(32) \quad \Omega = \frac{M}{1750 h} + \frac{\sqrt{Mh}}{808} + \frac{T}{1725} + \frac{h\sqrt{T}}{1162}$$

Pour trouver le volume total d'un longeron de la partie trapézoïdale de la voilure, il faut exécuter les quatre intégrations

$$\int_0^{e_1} \frac{M}{h} dx; \quad \int_0^{e_1} \sqrt{Mh} dx; \quad \int_0^{e_1} T dx; \quad \int_0^{e_1} h\sqrt{T} dx.$$

En se reportant à la figure 14, on a

$$S = 2(p_0 \times 0,27e + 0,75 p_0 \times 0,73e) = 1,64 p_0 e;$$

$$\lambda = \frac{4e^2}{S} = \frac{4e^2}{1,64 p_0 e} = 2,44 \frac{e}{p_0};$$

$$\frac{2e}{p_0} = m = 0,82 \lambda,$$

p_0 étant la profondeur maximum de l'aile. Avec la charge alaire q , la charge sur la partie à l'extérieur de la section x devient

$$(33) \quad 1,68 q \frac{p_0}{2} \left(2 + \frac{x}{e_1} \right) \frac{x}{2} = 0,84 \frac{qex}{m} \left(2 + \frac{x}{e_1} \right) = T$$

la distance entre le centre de gravité de la charge et la section envisagée

$$\xi = \frac{x}{3} \times \frac{3 + \frac{x}{e_1}}{2 + \frac{x}{e_1}},$$

et le moment fléchissant

$$(34) \quad M = T\xi = 0,28 \frac{qe x^2}{m} \left(3 + \frac{x}{e_1} \right).$$

Nous admettons pour la décroissance du profil de l'aile une loi de simple similitude géométrique. La hauteur du longeron en un endroit quelconque sera donc

$$(35) \quad h = \frac{h_0}{2} \left(1 + \frac{x}{e_1} \right)$$

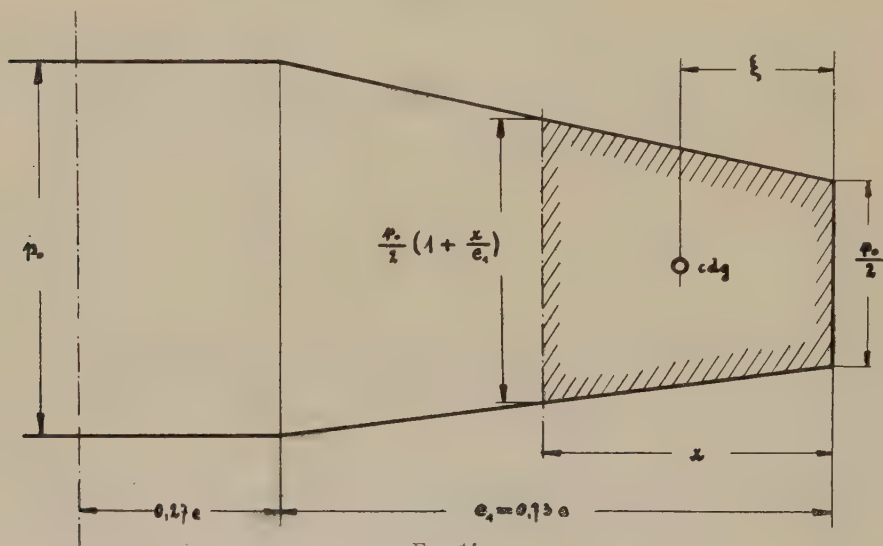


FIG. 14.

h_0 étant la hauteur dans la partie centrale. Ceci permet d'exécuter les quatre intégrations :

$$(36) \quad \left. \begin{aligned} \int_0^{e_1} \frac{M}{h} dx &= 0,56 \frac{qe}{mh_0} \int_0^{e_1} \frac{3 + \frac{x}{e_1}}{1 + \frac{x}{e_1}} x^2 dx; \\ \frac{x}{e_1} &= u : \int_0^{e_1} \frac{3 + \frac{x}{e_1}}{1 + \frac{x}{e_1}} x^2 dx = e_1^3 \int_0^1 \frac{u+3}{u+1} u^2 du = \\ &= e_1^3 \int_0^1 \frac{(u+1)u^2 + 2(u+1)^2 - 4(u+1) + 2}{u+1} du = 0,719 e_1^3; \\ e_1 &= 0,73e; \quad \int_0^{e_1} \frac{M}{h} dx = 0,56 \frac{qe}{mh_0} \times 0,719 e_1^3 = 0,157 \frac{q}{mh_0} e^4. \end{aligned} \right\}$$

$$(37) \left\{ \begin{aligned} \int_0^{e_1} \sqrt{Mh} \, dx &= 0,375 \sqrt{\frac{qe h_0}{m}} \int_0^{e_1} \sqrt{\left(1 + \frac{x}{e_1}\right) \left(3 + \frac{x}{e_1}\right)} x \, dx; \\ 2 + \frac{x}{e_1} = v : \int_0^{e_1} \sqrt{\left(1 + \frac{x}{e_1}\right) \left(3 + \frac{x}{e_1}\right)} x \, dx &= e_1^2 \int_2^3 \sqrt{v^2 - 1} (v - 2) \, dv = \\ &= e_1^2 \left[\frac{1}{3} (v^2 - 1)^{3/2} - v \sqrt{v^2 - 1} + \ln (v + \sqrt{v^2 - 1}) \right]_2^3 = 1,23 e_1^2; \\ \int_0^{e_1} \sqrt{Mh} \, dx &= 0,375 \sqrt{\frac{qe h_0}{m}} 1,23 e_1^2 = 0,245 \sqrt{\frac{q h_0}{m}} e^{5/2}. \end{aligned} \right.$$

$$(38) \quad \int_0^{e_1} T \, dx = 0,84 \frac{qe}{m} \int_0^{e_1} x \left(2 + \frac{x}{e_1}\right) dx = 0,84 \frac{qe}{m} \left(x^2 + \frac{x^3}{3e_1}\right)_0^{e_1} = \\ = 0,84 \frac{qe}{m} \times \frac{4}{3} e_1^2 = 0,597 \frac{qe^3}{m}.$$

$$(39) \left\{ \begin{aligned} \int_0^{e_1} h \sqrt{T} \, dx &= 0,459 \sqrt{\frac{qe}{m}} h_0 \int_0^{e_1} \left(1 + \frac{x}{e_1}\right) \sqrt{\left(2 + \frac{x}{e_1}\right)} x \, dx; \\ 1 + \frac{x}{e_1} = z : \int_0^{e_1} \left(1 + \frac{x}{e_1}\right) \sqrt{\left(2 + \frac{x}{e_1}\right)} x \, dx &= e_1^{3/2} \int_1^3 z \sqrt{(z+1)(z-1)} \, dz = e_1^{3/2} \sqrt{3}; \\ \int_0^{e_1} h \sqrt{T} \, dx &= 0,459 \sqrt{\frac{qe}{m}} h_0 e_1^{3/2} \sqrt{3} = 0,495 \sqrt{\frac{q}{m}} h_0 e^2. \end{aligned} \right.$$

Pour la partie centrale, nous avons

$$(40) \quad T = 2,52 \frac{qe e_1}{m} = 1,840 \frac{qe^2}{m}$$

$$(41) \quad M = 1,12 \frac{qe e_1^2}{m} = 0,596 \frac{qe^3}{m}.$$

Le volume d'un longeron pour une partie trapézoïdale et la moitié d'une partie centrale sera

$$V_1 = \frac{0,157 q e^4}{1750 m h_0} + \frac{0,245}{808} \sqrt{\frac{q h_0}{m}} e^{5/2} + \frac{0,597 q e^3}{1725 m} + \frac{0,495}{1162} \sqrt{\frac{q}{m}} h_0 e^2 + \\ + 0,270 e \left(\frac{0,596 q e^3}{1750 m h_0} + \frac{0,773}{808} \sqrt{\frac{q e^3 h_0}{m}} + \frac{1,84 q e^2}{1725 m} + \frac{1,36}{1162} \sqrt{\frac{q}{m}} e h_0 \right).$$

Dans cette formule, l'unité de longueur est le centimètre. En exprimant q en kgs par m^2 , et h_0 et e en mètres, il vient, pour le volume en dm^3 :

$$\frac{10^4 V_1}{e^3} = 0,181 \frac{qe}{m h_0} + 56,1 \sqrt{\frac{q}{m}} \sqrt{\frac{h_0}{e}} + 0,634 \frac{q}{m} + 74,0 \sqrt{\frac{q}{m}} \times \frac{h_0}{e}.$$

Le volume de l'ensemble des longerons sera quatre fois plus grand, et pour

obtenir le poids en kilogrammes, il faudra encore multiplier par 2,85 ; si nous remplaçons encore m par $0,82 \lambda$, il vient

$$(42) \quad \frac{10^4 P_1}{e^3} = 2,51 \frac{q e}{\lambda h_0} + 708 \sqrt{\frac{q}{\lambda}} \sqrt{\frac{h_0}{e}} + 8,81 \frac{q}{\lambda} + 931 \sqrt{\frac{q}{\lambda}} \frac{h_0}{e}.$$

Il serait intéressant de déterminer le rapport $\frac{e}{h_0}$ de façon à ce que le poids des longerons devienne un minimum, mais le calcul montre que la hauteur de longeron qui en résulterait conduirait à un profil d'aile trop épais. D'après les essais que nous avons fait faire au Laboratoire Eiffel (voir l'annexe), les caractéristiques aérodynamiques deviennent trop mauvaises si l'on dépasse une certaine hauteur à l'endroit du longeron AR ; la limite pratique semble être notre profil qui a été essayé sous la désignation E. 450 et qui donne, pour les positions des longerons indiquées par les équations (12) et (13), une hauteur relative $\frac{h_0}{p_0}$ d'environ 15 % (voir fig. 3).

Introduisons cette valeur dans l'équation (42)

$$\frac{h_0}{p_0} = \frac{h_0 m}{2e} = 0,41 \quad \frac{h_0}{e} \lambda = 0,15; \quad \frac{e}{h_0} = 2,73 \lambda;$$

$$\frac{10^4 P_1}{e^3} = 6,85 q + 428 \frac{\sqrt{q}}{\lambda} + 8,81 \frac{q}{\lambda} + 341 \frac{\sqrt{q}}{\lambda^{3/2}}.$$

Avec la relation

$$P_1 = qS = q \frac{4e^2}{\lambda}$$

on a

$$e^3 = \frac{1}{8} \left(\frac{P_1 \lambda}{q} \right)^{3/2},$$

donc

$$(43) \quad \frac{10^4 P_1}{P_t^{3/2}} = 0,857 \frac{\lambda^{3/2}}{q^{1/2}} + 53,5 \frac{\lambda^{1/2}}{q} + 1,10 \frac{\lambda^{1/2}}{q^{1/2}} + 42,7 \frac{1}{q}.$$

La résistance nécessaire du haubannage de traînée ne peut pas être déterminée par les efforts à supporter en vol, puisque, comme il a été dit plus haut (p. 22), le cas qui donne généralement les plus grands efforts est éliminé pour le type d'avion envisagé, grâce à la répartition des charges sur toute la voilure. La section sera plutôt déterminée par la rigidité nécessaire, donc fonction de la résistance des longerons. Nous admettons, en conséquence, que le poids du haubannage de traînée constitue un certain pourcentage fixe du poids des longerons. En prenant, comme valeur pratique, 10 %, il vient finalement, pour le poids de la poutre principale

$$(44) \quad P_1 = 1,1 P_t = \left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2} \left(2,97 \frac{\lambda^{3/2}}{q^{1/2}} + 186 \frac{\lambda^{1/2}}{q} + 3,83 \frac{\lambda^{1/2}}{q^{1/2}} + 148 \frac{1}{q} \right)$$

P_t étant le poids total ; λ l'allongement et q la charge alaire en kg/m^2 .

Le poids des poutrelles secondaires — nervures, longeronnets, etc... — sera pratiquement indépendant de l'allongement. Etant donné que ces poutrelles devront toujours être surdimensionnées pour des raisons de fabrication et

d'entretien, l'augmentation de leur section nécessaire ne suivra pas directement l'augmentation des efforts appliqués qui sont proportionnels à la charge alaire ; nous admettons donc une proportionnalité à la racine carrée seulement de la charge alaire. D'autre part, puisque l'influence de l'allongement est négligeable, le poids par m² de ces poutrelles va suivre la loi de Lanchester, de sorte que l'on a

$$P_2 = k \times S^{3/2} \times \sqrt{q},$$

k ayant la dimension $\text{kg}^{1/2} \times \text{m}^{-2}$.

En adoptant pour k une valeur fixe, déduite de la pratique, nous arrivons, pour P_1 en kgs et q en kg/m^2 à

$$(45) \quad P_2 = 0,02 \left(\frac{P_1}{q} \right)^{3/2} \sqrt{q} = 632 \left(\frac{P_1}{1000} \right)^{3/2} \frac{1}{q}.$$

Pour le poids du recouvrement, nous adoptons une simple proportionnalité à la surface, soit

$$(46) \quad P_3 = 0,7 S = 0,7 \frac{P_1}{q}.$$

le coefficient 0,7 ayant la dimension $\text{kg} \times \text{m}^{-2}$.

Le poids des groupes moto-propulseurs, comprenant les moteurs avec tous les accessoires (radiateurs, hélices, bâtis, canalisations, etc.), est sensiblement proportionnel à leur équivalent de puissance, si nous faisons abstraction du poids des réservoirs d'essence et d'huile qui sera ajouté au poids du combustible. Nous admettons

$$(47) \quad P_4 = 1,5 H.$$

H étant exprimé en chevaux-vapeur.

Pour le reste de la construction, le problème serait très complexe, si l'on voulait étudier l'influence de l'allongement de la voilure et de la charge alaire sur les proportions et le poids nécessaire de l'empennage, des poutres de liaison, etc... Or, cette influence, prise dans l'ensemble, est assez faible en comparaison avec la proportionnalité qui existe avec le poids total de l'avion. Toutefois, il nous semble justifié de distinguer entre les parties qui ont à résister à des efforts dépendant du poids total de l'avion, telles que les atterrisseurs, les poutres de liaison entre l'aile et l'empennage, etc... et les pièces dont les dimensions augmentent avec les dimensions de l'avion, sans que leur section nécessaire soit en proportion avec le poids total, telles que les commandes, par exemple. En nous basant sur des chiffres relevés sur des avions existants, nous pouvons poser

$$(48) \quad P_5 = 0,0005 P_1^{3/2} + 0,05 P_1$$

le premier coefficient ayant la dimension $\text{kg}^{-1/2}$; le deuxième étant un coefficient absolu.

En ce qui concerne les réservoirs d'essence et d'huile, leur poids est, à partir d'une certaine grandeur, proportionnel au volume. Pour des réservoirs en duralumin de forme simple, se rapprochant du cylindre circulaire, dont la hauteur égale le diamètre, on peut compter 20 grammes par litre, soit en moyenne pour le combustible qui se compose d'environ 90 % d'essence d'une densité de 0,720 et de 10 % d'huile d'une densité de 0,900.

$$(49) \quad P_6 = \frac{0,020 P_7}{0,9 \times 0,720 + 0,1 \times 0,900} = 0,027 P_7.$$

CHAPITRE V

Calcul de la puissance motrice

Les expressions pour les différentes parties du poids de construction que nous venons de trouver contiennent encore trois variables : L'allongement, la charge alaire et la puissance motrice ; un calcul aérodynamique permettra d'en éliminer deux.

D'après les essais au tunnel, mentionnés au chapitre III, nous pouvons admettre pour le coefficient minimum de trainée de l'avion complet.

$$C_{x \min} = 0,03.$$

Pour une aile d'allongement λ et pour la portance C_z on aurait

$$C_x = 0,03 + \frac{C_z^2}{\pi \lambda}.$$

Les résistances parasites augmentent, elles aussi, avec l'incidence, donc avec la portance, de sorte que, pratiquement, la résistance est plus grande, environ

$$(50) \quad C_x = 0,03 + \frac{C_x^2}{2 \lambda}.$$

Avec des hélices démultipliées, on peut compter sur un rendement de 75 % en palier et de 60 % en montée, ce dernier chiffre tenant déjà compte de la diminution de la puissance due à la diminution du nombre de tours. La traction sera, en conséquence, pour la vitesse V mètres par seconde, et la puissance Π en CV. :

En palier

$$(51) \quad \frac{75 \Pi \times 0,75}{V} = 56,3 \frac{\Pi}{V} \text{ kgs.}$$

et en montée

$$(52) \quad \frac{75 \Pi \times 0,60}{V} = 45 \frac{\Pi}{V} \text{ kgs.}$$

La meilleure montée se ferait, théoriquement, avec une incidence correspondant au maximum de $\frac{C_z}{C_x}$. C'est un régime assez lent, qui pratiquement, ne donne pas de vitesse ascensionnelle supérieure à celle que l'on obtient avec une incidence correspondant au maximum de finesse $\frac{C_z}{C_x}$. L'incidence plus forte ne

sera utilisée qu'au moment du décollage. Cherchons les valeurs de C_z pour ces deux régimes :

$$(53) \left\{ \begin{aligned} \frac{C_x}{C_z} &= \frac{0,03}{C_z} + \frac{C_z}{2\lambda}; \\ \frac{d}{dC_z} \left(\frac{C_x}{C_z} \right) &= 0 = -\frac{0,03}{C_z^2} + \frac{1}{2\lambda}; \quad C_z = 0,245\sqrt{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

$$(54) \left\{ \begin{aligned} \frac{C_x^2}{C_z^3} &= \frac{0,0009}{C_z^3} + \frac{0,03}{\lambda C_z} + \frac{C_z}{4\lambda^2}; \\ \frac{d}{dC_z} \left(\frac{C_x^2}{C_z^3} \right) &= 0 = -\frac{0,0027}{C_z^4} - \frac{0,03}{C_z^2} + \frac{1}{4\lambda^2}; \\ C_z &= 0,425\sqrt{\lambda}. \end{aligned} \right.$$

Avec la charge alaire $q_t = \frac{P_t}{S}$ les vitesses correspondantes sont

$$(55) \quad V_1 = \sqrt{\frac{16 q_t}{0,245\sqrt{\lambda}}} = 8,08 q_t^{1/2} \lambda^{-1/4} \quad \text{et} \quad V_2 = 6,15 q_t^{1/2} \lambda^{-1/4}.$$

Pour la sécurité de l'exploitation, il est indispensable que l'avion fasse certaines performances minima. Il nous semble logique de nous conformer ici aussi, aux conditions imposées par la Commission Internationale de Navigation Aérienne pour les avions commerciaux. Ces conditions sont au nombre de deux :

- 1° Atteindre une altitude de 360 mètres, en moins de trois minutes ;
- 2° Franchir un obstacle de 20 mètres de haut, placé à une distance de 600 mètres du point de départ.

Si l'on tient compte de la période de décollage, où l'avion roule d'abord au sol, puis fait un virage dans un plan vertical pour monter ensuite suivant une trajectoire inclinée, la première condition à remplir signifie une vitesse ascensionnelle d'environ 2,5 m. par seconde. Cette vitesse est déterminée par

$$V_z = V_1 \frac{45 \frac{\Pi}{V_1} - P_t \frac{C_x}{C_z}}{P_t} = 45 \frac{\Pi}{P_t} - V_1 \frac{C_x}{C_z},$$

V_1 étant la vitesse sur la trajectoire. Avec $C_z = 0,245 \lambda^{1/2}$, on a

$$\frac{C_x}{C_z} = 0,245 \lambda^{-1/2}$$

et

$$2,5 = 45 \frac{\Pi}{P_t} - V_1 \times 0,245 \lambda^{-1/2},$$

d'où

$$(56) \quad \frac{\Pi}{P_t} = 0,0555 + 0,00545 V_1 \lambda^{-1/2}.$$

Pour étudier la deuxième condition — obstacle de 20 mètres — il faut calculer la longueur de roulement au décollage. Cette longueur peut être assez variable, suivant que le pilote « arrache » l'avion du sol ou qu'il le « laisse courir », c'est-à-dire suivant qu'il provoque le décollage dès l'instant où la vitesse est suffisante pour le vol horizontal avec un angle d'incidence élevé ou qu'il attend que la vitesse soit suffisante pour que l'avion puisse se mettre tout de suite en montée.

C'est sur la deuxième méthode — qui est d'ailleurs préférable pour tous les avions lourdement chargés — que nous baserons nos calculs. Nous admettons donc, comme il a été dit plus haut, que la vitesse au moment du décollage soit celle correspondant au maximum de $\frac{C_z^3}{C_x^2}$ et sa relation avec la vitesse sur la trajectoire, en montée, sera

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{0,245}{0,425}} = 0,755 V_1.$$

Pendant la période de roulage au sol, caractérisée par une accélération décroissante γ , quatre forces agissent sur l'avion :

La force d'inertie $\frac{P_t \gamma}{g}$;

La résistance à l'avancement $SC_x \frac{V^2}{16}$;

La traction des hélices, et

La résistance au roulement.

Nous voulons admettre que la différence entre les deux dernières forces est sensiblement constante et égale à la traction des hélices en montée. Le coefficient de traînée C_x sera évidemment très variable pendant la période de décollage, par suite des changements très importants de l'incidence ; d'autre part, l'interaction du sol a pour effet d'augmenter la portance et de diminuer en même temps la traînée. Toutefois, le principal changement d'incidence, la levée de la queue, se produit sur un parcours qui est relativement faible, de sorte que, sur la plus grande partie de la longueur de décollage, le coefficient de traînée sera sensiblement constant et égal à celui de la traînée minimum

$$C_x = 0,03.$$

La résistance sera donc, pendant la période d'accélération

$$0,03 S \frac{V^2}{16} = 0,03 \frac{P_t}{q_t} \times \frac{V^2}{16}$$

et l'équation de mouvement devient

$$P_t \frac{\gamma}{9,81} = 45 \frac{\Pi}{V_1} - 0,03 \frac{P_t}{q_t} \times \frac{V^2}{16}$$

En posant

$$VdV = \gamma ds = \frac{9,81}{P_t} \left(45 \frac{\Pi}{V_1} - 0,03 \frac{P_t}{q_t} \times \frac{V^2}{16} \right) ds,$$

on obtient la longueur de roulement, pour atteindre la vitesse V_2

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{V_2} \frac{VdV}{441 \frac{\Pi}{P_t V_1} - 0,0184 \frac{V^2}{q_t}} = -27,1 q_t \log \text{nep} \left(441 \frac{\Pi}{P_t V_1} - 0,0184 \frac{V^2}{q_t} \right)_0^{V_2} = \\ &= -27,1 q_t \log \text{nep} \left(1 - 0,0000418 \frac{V_1 V_2^2 P_t}{q_t \Pi} \right) = \\ &= -27,1 q_t \log \text{nep} \left(1 - 0,0000238 \frac{V_1^3 P_t}{q_t \Pi} \right). \end{aligned}$$

La charge par cheval $\frac{P_t}{\Pi}$ ne dépassera pas 10 kg/CV ; d'autre part, q_t sera pratiquement supérieur à 60 kg/m² et V_1 inférieur à 40 m/s. Il en résulte que la valeur du deuxième terme entre parenthèse, ne dépassera pas

$$0,0000238 \times \frac{64000 \times 10}{60} = 0,254$$

et qu'il est permis d'exprimer le logarithme par une fonction linéaire

$$\log \text{ nep } (1 - \alpha) \approx 1 - \alpha$$

d'où

$$(57) \quad s = \frac{V_1^3 P_t}{1550 \Pi}.$$

Après avoir décollé, l'avion monte suivant une trajectoire inclinée, avec la vitesse V_1 et une vitesse ascensionnelle de 2,5 m/sec. D'après la figure 15, on a

$$20 = (600 - s) \frac{2,5}{V_1}; \quad s = 600 - 8 V_1,$$

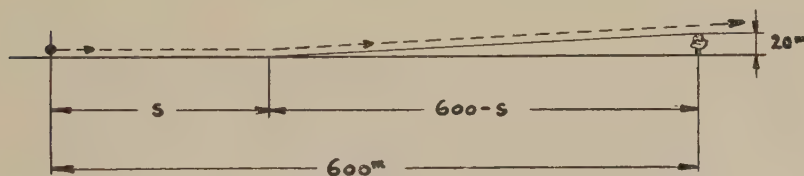


FIG. 15.

d'où

$$\frac{V_1^3 P_t}{1550 \Pi} = 600 - 8 V_1.$$

Cette équation permet de déterminer $\frac{P_t}{\Pi}$ en fonction de V_1

$$\frac{P_t}{\Pi} = \frac{930.000}{V_1^3} - \frac{12.400}{V_1^2}.$$

On a pour

$V_1 = 35$	36	37	38	39	40	mètres par sec.
$\frac{P_t}{\Pi} = 11,6$	10,3	9,1	8,4	7,55	6,70	kg. par CV.

La formule (56) permet de calculer l'allongement correspondant

$$\lambda^{-1/2} = \frac{1}{V_1} \left(184 \frac{\Pi}{P_t} - 10,2 \right),$$

ce qui donne pour

$V_1 = 35$	36	37	38	39	40	mètres par sec.
$\lambda = 38$	22	13,4	10,6	7,65	5,33	

Cette relation entre V_1 et λ peut être exprimée avec une approximation suffisante dans l'intervalle qui nous intéresse, par

$$(58) \quad V_1 = 46,5 \lambda^{-\frac{4}{12}}.$$

D'après l'équation (55) on avait $V_1 = 8,08 q_1^{1/2} \lambda^{-1/4}$; il en résulte

$$(59) \quad q_1 = 33 \lambda^{1/3}.$$

et la puissance nécessaire par kilogramme

$$(60) \quad \frac{P}{P_1} = 0,0555 + 0,253 \lambda^{-\frac{7}{12}}.$$

Après avoir déterminé la puissance, étudions sa meilleure répartition au point de vue de la sécurité de fonctionnement, c'est-à-dire, le nombre optimum de moteurs.

Admettons que pour un moteur et la durée de vol envisagée la chance de panne soit $\frac{1}{k}$. Pour un avion muni de n moteurs, la probabilité de panne d'un moteur sera

$$p_1 = \frac{n}{k}$$

et la probabilité d'une panne simultanée à m moteurs

$$p_2 = \left(\frac{n}{k}\right)^m.$$

L'expérience acquise avec les multimoteurs indique qu'avec un avion bien étudié, on peut continuer le voyage avec deux tiers de la puissance totale.

L'avion ne sera donc vraiment en panne, que si le nombre de moteurs arrêtés atteint

$$m = \frac{n}{3} + 1.$$

La probabilité que cela se produit est

$$(61) \quad p_3 = \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{n}{3} + 1}$$

En faisant le calcul pour différentes valeurs de n et de k , on trouve, qu'à chaque valeur de k correspond une valeur optima de n avec laquelle p_3 devient un minimum. Il n'y a donc pas intérêt, au point de vue de la sécurité, à augmenter le nombre des moteurs, au-dessus d'une certaine limite.

Différentions, pour la simplicité du calcul, le logarithme de p_3 :

$$\log \text{ nep } p_3 = \left(\frac{n}{3} + 1\right) (\log \text{ nep } n - \log \text{ nep } k)$$

$$\frac{d}{dn} (\log \text{ nep } p_3) = \left(\frac{n}{3} + 1\right) \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \log \text{ nep } n - \frac{1}{3} \log \text{ nep } k = 0,$$

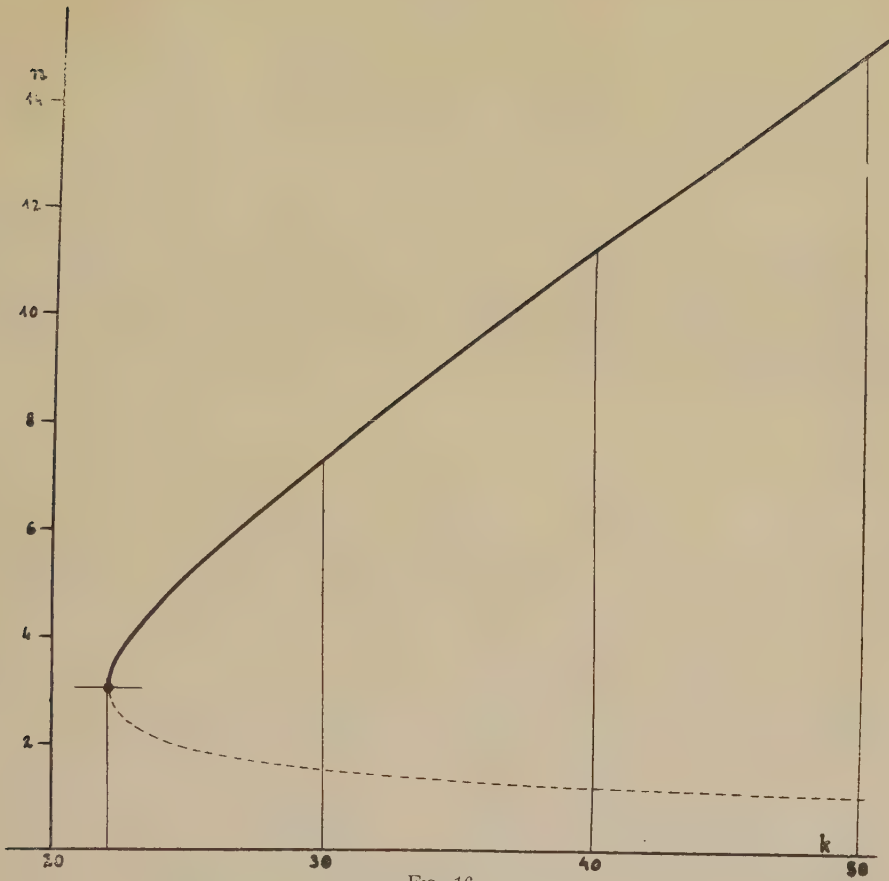


FIG. 16.

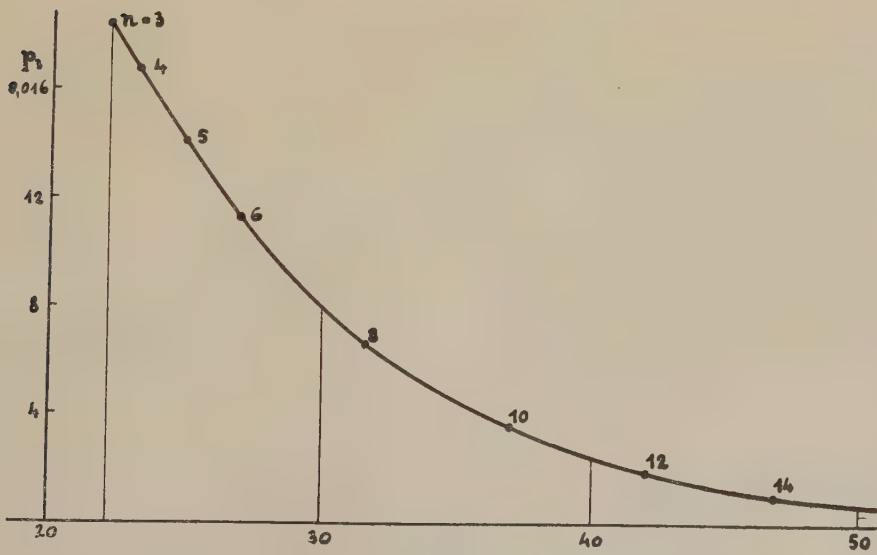


FIG. 17.

d'où

$$\log nep k = 1 + \frac{3}{n} + \log nep n$$

$$62) \quad k = n \times e^{\frac{3}{n} + 1} \quad (\text{pour } n = n_{\text{opt}}).$$

La figure 16 donne les valeurs de n_{opt} en fonction de k , à condition que k soit supérieur à $3 e^2 = 22,2$; au-dessous de cette valeur, il n'y aurait plus de valeur optima pour n et le monomoteur serait préférable. La figure 17 indique la diminution de chance de panne complète avec la diminution de chance de panne individuelle, à condition que le nombre de moteurs corresponde au nombre optimum.

CHAPITRE VI

Calcul de la "Capacité de Transport"

L'expression (60) pour la puissance nécessaire servira à déterminer le poids des groupes moteurs ; la puissance nécessaire pour le vol à la vitesse d'utilisation est bien inférieure. Pour trouver sa valeur optima, revenons à la formule (5) pour la « Capacité de Transport ». On admet généralement que l'influence du vent se traduit par une différence entre la vitesse du vol V et la vitesse commerciale V_c , différence qui est en moyenne de 10 mètres par seconde. Pour simplifier les intégrations qui vont suivre, nous posons :

$$(63) \quad V_c = 0,215 V^{4/3}$$

ce qui donne pour les vitesses qui nous intéressent, une approximation suffisante :

$V = 35$	40	45	50	55	60	m/sec
$V_c = 24,6$	$29,4$	$34,5$	$39,6$	$45,0$	$50,5$	m/sec.

Pour le vol horizontal, on a, en appelant Π , P et V des valeurs variables avec le temps, par suite du délestage dû à la consommation de combustible :

$$\Pi = \frac{PV}{75 \times 0,75 \times C_z} \left(0,03 + \frac{C_z^2}{2\lambda} \right).$$

Introduisons la surface alaire S , qui est une constante, pour éliminer l'inconnue C_z

$$P = \frac{V^2}{16} \times C_z \times S; \quad \frac{C_z^2}{2\lambda} = \frac{256 P^2}{2\lambda S^2 V^4};$$

$$\Pi = \frac{SV^3}{900} \left(0,03 + \frac{128 P^2}{\lambda S^2 V^4} \right).$$

Cherchons la valeur optima du terme $\frac{V_c^{3/2}}{\Pi}$, auquel la capacité de transport est directement proportionnelle ; avec

$$V_c = 0,215 V^{4/3}$$

il vient

$$V_c^{3/2} = 0,100 V^2$$

pour les valeurs pratiques de V comprises entre 40 et 60 mètres par seconde.

On a alors

$$\frac{\Pi}{V_e^{3/2}} = \frac{\Pi}{0,1 V^2} = \frac{SV}{3000} + 1,425 \frac{P^2}{\lambda S V^3};$$

$$\frac{d}{dV} \left(\frac{\Pi}{0,1 V^2} \right) = 0 = \frac{S}{3000} - 4,275 \frac{P^2}{\lambda S V^4}; \quad V^4 = 12825 \frac{P^2}{\lambda S^2};$$

$$V = 10,65 q^{1/2} \lambda^{-1/4}.$$

Au début du vol $q_t = 33 \lambda^{1/3}$, donc

$$(64) \quad V_0 = 61,3 \lambda^{-1/12}.$$

La puissance nécessaire pendant le voyage sera :

$$(65) \quad \Pi = \frac{SV^3}{900} (0,03 + 0,010) = \frac{SV^3}{22500}$$

et l'expression de la capacité de transport devient

$$T = 14,4 P_m \int_{P_t}^{P_l} \frac{2250}{SV} dP = 32400 P_m \int_{P_t}^{P_l} \frac{dP}{SV}.$$

Puisque S ne varie pas avec le temps, on a $\frac{dP}{S} = dq$ et

$$T = 32.400 P_m \int_{q_t}^{q_l} \frac{dq}{10,65 q^{1/2} \lambda^{-1/4}} = 6080 P_m \lambda^{1/4} [q_t^{1/2} - (q_t - q_c)^{1/2}],$$

si nous appelons q_t et q_c les charges alaires correspondant à P_t et P_c .

Avec $q_t = 33 \lambda^{1/3}$ il vient

$$(66) \quad T = 34.960 P_m \lambda^{5/12} \left[1 - \left(\frac{P_t - P_c}{P_t} \right)^{1/2} \right].$$

Cette expression atteindra sa valeur maxima pour

$$\frac{d}{dP_m} \left\{ P_m \left[1 - \left(\frac{P_t - P_c}{P_t} \right)^{1/2} \right] \right\} = 0,$$

condition qui servira à déterminer le rapport optimum entre P_m et P_c .

En introduisant l'équation initiale (1), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dP_m} &= \left\{ P_m \left[1 - \left(\frac{P_e + P_m}{P_t} \right)^{1/2} \right] \right\} = \\ &= 1 - \left(\frac{P_e + P_m}{P_t} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left(\frac{P_e + P_m}{P_t} \right)^{-1/2} \times \frac{P_m}{P_t} = 0; \\ \left(\frac{P_t}{P_e + P_m} \right)^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2} \frac{P_m}{P_e + P_m}. \end{aligned}$$

La relation entre P_m et P_t est donc établie si l'on connaît P_e ; P_e est déterminé par le complément au poids total P_t . Pour les valeurs pratiques de $\frac{P_e}{P_t}$, comprises entre 40 et 80 %, cette relation peut être exprimée par

$$(67) \quad \frac{P_m}{P_t} = 0,48 \left(1 - \frac{P_e}{P_t} \right) \quad \text{et} \quad \frac{P_e}{P_t} = 0,52 \left(1 - \frac{P_m}{P_t} \right).$$

La valeur maxima de la capacité de transport est

$$(68) \quad T_{\max} = 34960 P_m \lambda^{5/12} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{P_m}{P_e + P_m}} \right) = 5590 P_t \frac{\lambda^{5/12} \left(1 - \frac{P_e}{P_t} \right)^2}{1 + 0,39 \frac{P_e}{P_t}}$$

pour les valeurs de $\frac{P_e}{P_t}$ comprises entre 40 et 80 %.

On voit la grande influence du terme $\frac{P_e}{P_t}$. Pour trouver le poids équipé, il y a lieu d'ajouter au poids de construction, tel qu'il est donné par les formules (44) à (49), le poids de l'équipage et de l'équipement. Il se compose de trois termes nettement différents:

a) Pour la conduite d'un grand avion sur des longues distances, il faut compter deux pilotes et un navigateur, une installation de T. S. F. et des instruments de navigation, soit, au total un poids invariable de 400 kilogs.

b) Pour l'entretien des moteurs en vol, il faut compter un mécanicien à 80 kilogs. par 1.000 CV., soit $\frac{80}{1500} = 5,3$ % du poids des groupes moto-propulseurs.

c) Pour l'aménagement des cabines, l'éclairage, le chauffage, etc., il faut compter 10 % de la charge marchande. En tenant compte des relations

$$q_t = 33 \lambda^{4/3}$$

et

$$\frac{H_t}{P_t} = 0,0555 + 0,253 \lambda^{-7/12},$$

il vient, pour le poids de

la poutre principale

$$\left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2} \times (0,518 \lambda^{4/3} + 5,64 \lambda^{1/6} + 0,668 \lambda^{1/3} + 4,49 \lambda^{-1/3});$$

les poutres secondaires

$$\left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2} \times 19,2 \lambda^{-1/3};$$

le recouvrement

$$\frac{P_t}{1000} \times 21,2 \lambda^{-1/3};$$

les groupes moteurs

$$\frac{P_t}{1000} (83 + 380 \lambda^{-7/12});$$

les réservoirs

$$0,027 \times 0,52 P_t \left(1 - \frac{P_e}{P_t}\right) = 14 \frac{P_t}{1000} \left(1 - \frac{P_e}{P_t}\right);$$

le reste de la construction

$$15,8 \left(\frac{P_t}{1000}\right)^{3/2} + 50 \frac{P_t}{1000};$$

l'équipage et les instruments

$$400 \text{ kgs};$$

les mécaniciens

$$\frac{P_t}{1000} \times (4 + 20 \lambda^{-7/12});$$

l'aménagement

$$0,1 P_m = 48 \frac{P_t}{1000} \left(1 - \frac{P_e}{P_t}\right).$$

L'addition donne :

$$(69) \quad 1062 \frac{P_e}{P_t} = \left(\frac{P_t}{1000}\right)^{1/2} (0,518 \lambda^{4/3} + 5,64 \lambda^{1/6} + 0,668 \lambda^{1/3} + 23,7 \lambda^{-1/3} + 15,8) + \\ + 21,2 \lambda^{-1/3} + 400 \lambda^{-7/12} + 199 + \frac{400.000}{P_t}.$$

Pour différentes valeurs de λ , le coefficient de $\left(\frac{P_t}{1000}\right)^{1/2}$ prend les valeurs suivantes :

λ	6	8	10	12	14	16
$0,518 \lambda^{4/3} =$	5,65	8,29	11,18	14,22	17,50	20,90
$5,64 \lambda^{1/6} =$	7,62	7,95	8,29	8,51	8,74	8,96
$0,668 \lambda^{1/3} =$	1,22	1,34	1,44	1,53	1,61	1,63
$23,7 \lambda^{-1/3} =$	13,08	11,87	11,01	10,35	9,85	9,63
$15,8 =$	15,80	15,80	15,80	15,80	15,80	15,80
$C_1 =$	43,37	45,25	47,72	50,41	53,50	56,94

et le terme indépendant de P_t

$21,2 \lambda^{-1/3} =$	11,7	10,6	9,8	9,3	8,8	8,6
$400 \lambda^{-7/12} =$	141,0	118,7	104,4	93,7	85,5	79,3
$199 =$	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0	199,0
$C_2 =$	351,7	328,3	313,2	302,0	293,3	286,9

Le poids équipé sera exprimé par

$$\frac{P_e}{P_t} = \frac{1}{1062} \left[C_1 \left(\frac{P_t}{1000}\right)^{1/2} + C_2 + \frac{400.000}{P_t} \right],$$

ce qui donne, pour différentes valeurs de P_t et de λ

	$\lambda = 6$	8	10	12	14	16
$P_t = 20.000$	0,533	0,519	0,514	0,518	0,520	0,529
40.000	0,600	0,588	0,588	0,595	0,605	0,620
60.000	0,655	0,646	0,649	0,660	0,673	0,692
80.000	0,702	0,695	0,702	0,717	0,730	0,755
100.000	0,745	0,738	0,747	0,765	0,783	0,810

Ces chiffres permettent de calculer les valeurs du coefficient de la Capacité de Transport

$$\lambda^{5/12} \frac{\left(1 - \frac{P_c}{P_t}\right)^2}{1 + 0,39 \frac{P_c}{P_t}}.$$

Ce coefficient est représenté dans la figure 18 en fonction de λ et pour $P_t = 20, 40, 60, 80$ et 100 tonnes. Cherchons maintenant les valeurs correspondant aux sommets des courbes ; multipliées par le poids total correspondant. elles donnent, à une constante près, les valeurs optima de la capacité de transport

$$P_t \lambda^{5/12} \frac{\left(1 - \frac{P_c}{P_t}\right)^2}{1 + 0,39 \frac{P_c}{P_t}}.$$

Ces valeurs et les allongements correspondants sont représentés dans la figure 19.

On voit que le maximum absolu est atteint pour $P_t = 55.000$ kgs et que l'allongement correspondant est de 12.

Les relations établies entre P_t , S , q , λ et V permettent de calculer la distance parcourue D . D'après (4) on a

$$D = 14,4 \int_{P_t - P_c}^{P_t} \frac{V_c}{H} dP = 14,4 \int_{P_t - P_c}^{P_t} \frac{0,215 V^{4/3}}{S V^3} \times 22.500 dP;$$

avec

$$dP = S dq$$

et

$$V^{5/3} = 51,6 q^{5/6} \lambda^{-5/12}$$

il vient

$$D = 61.700 \int_{q_t - q_c}^{q_t} \frac{1}{51,6} q^{-5/6} \lambda^{5/12} dq = 8.100 \lambda^{5/12} [q_t^{1/6} - (q_t - q_c)^{1/6}];$$

$$q_t^{1/6} = 33^{1/6} \times \lambda^{1/18} = 1,79 \lambda^{1/18};$$

$$(70) \quad D = 14.500 \lambda^{\frac{17}{36}} \left[1 - \left(\frac{P_t - P_c}{P_t} \right)^{1/6} \right].$$

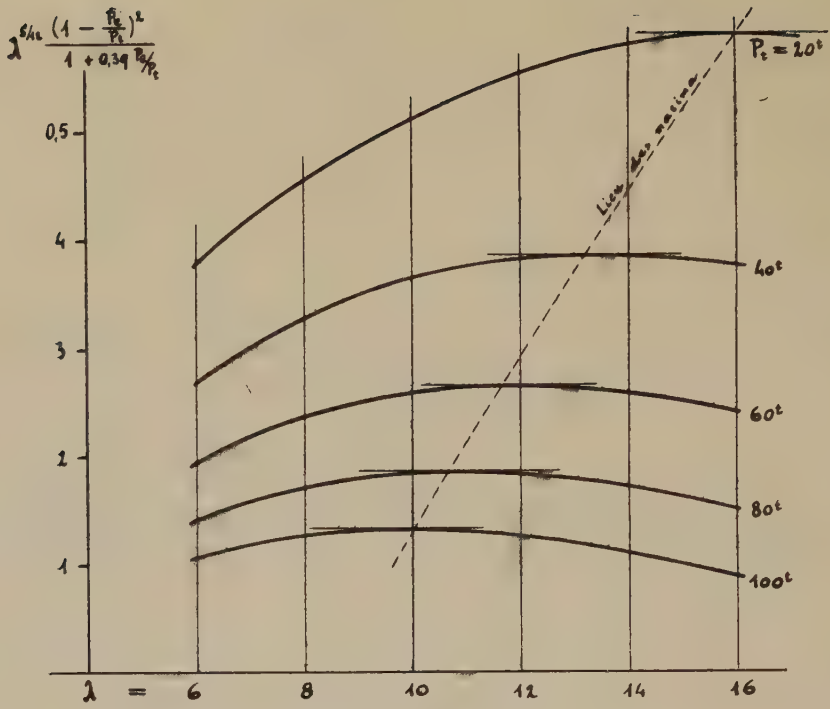


FIG. 18.

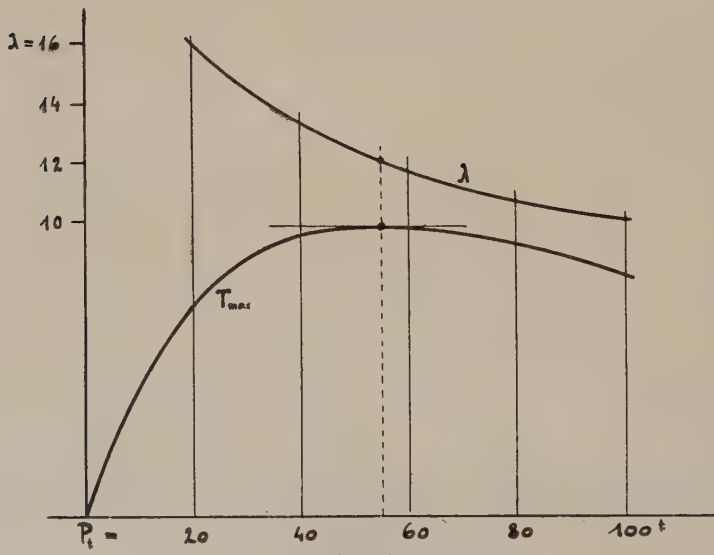


FIG. 19.

CHAPITRE VII

Interprétation numérique du résultat

Pour illustrer le résultat que nous venons de trouver, nous allons indiquer les caractéristiques principales d'un avion qui permet d'obtenir le maximum de la « Capacité de Transport ».

Pour $P_t = 55.000$ et $\lambda = 12$, le rapport du poids équipé au poids total sera, d'après la formule (69)

$$\begin{aligned} 1062 \frac{P_e}{P_t} &= \left(\frac{P_t}{1000} \right)^{1/2} (0,518 \lambda^{4/3} + 5,64 \lambda^{1/6} + 0,668 \lambda^{1/3} + 23,7 \lambda^{-1/3} + 15,8) + \\ &+ 21,2 \lambda^{-1/3} + 400 \lambda^{-7/12} + 199 + \frac{400.000}{P_t} = \\ &= 50,41 \sqrt{55} + 302,0 + \frac{400}{55} = 683; \\ \frac{P_e}{P_t} &= 0,643. \end{aligned}$$

La charge marchande et le poids de combustible d'après les formules (67)

$$\begin{aligned} \frac{P_m}{P_t} &= 0,48 \left(1 - \frac{P_e}{P_t} \right) = 0,48 (1 - 0,643) = 0,1715; \\ \frac{P_c}{P_t} &= 0,52 \left(1 - \frac{P_e}{P_t} \right) = 0,52 (1 - 0,643) = 0,1855. \end{aligned}$$

La répartition des poids sera donc, d'après les indications de la page 44

{	VOILURE	Poutre principale :	$\left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2} \times (0,518 \lambda^{4/3} + 5,64 \lambda^{1/6} + 0,668 \lambda^{1/3} + 4,49 \lambda^{-1/3}) = 10.700 \text{ kgs.}$
		Poutres secondaires :	$\left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2} \times 19,2 \lambda^{-1/3} = 3.410 \text{ kgs.}$
		Recouvrement :	$\frac{P_t}{1000} \times 21,2 \lambda^{-1/3} = 510 \text{ kgs.}$
		Groupes moteurs :	$\frac{P_t}{1000} (83 + 380 \lambda^{-7/12}) = 9.460 \text{ kgs.}$
		Réservoirs :	$14 \frac{P_t}{1000} \left(1 - \frac{P_e}{P_t} \right) = 275 \text{ kgs.}$

Fuselage, train, queue, commandes, etc. :

$$15,8 \left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2} + 50 \frac{P_t}{1000} = 9.180 \text{ kgs.}$$

$$\text{Poids de construction,} = 33.535 \text{ kgs.}$$

$$\text{Équipage et instruments,} = 400 \text{ kgs.}$$

$$\text{Mécaniciens : } \frac{P_t}{1000} (4 + 20 \lambda^{-7/12}) = 480 \text{ kgs.}$$

$$\text{Aménagements : } 0,1 P_m = 48 \frac{P_t}{1000} \left(1 - \frac{P_e}{P_t} \right) = 945 \text{ kgs.}$$

$$\text{Combustible : } P_c = 0,1855 P_t = 10.200 \text{ kgs.}$$

$$\text{Charge marchande : } P_m = 0,1715 P_t = 9.440 \text{ kgs.}$$

$$\text{Charge,} = 21.465 \text{ kgs.}$$

$$\text{Poids total,} = 55.000 \text{ kgs.}$$

D'après les formules (59) et (60), on a

$$q_t = 33 \lambda^{1/3} = 33 \times 12^{1/3} = 75,6 \text{ kg/m}^2$$

et

$$\frac{\Pi}{P_t} = 0,0555 + 0,253 \lambda^{-7/12} = 0,0555 + 0,253 \times 12^{-7/12} = 0,1148,$$

donc, la surface

$$S = \frac{55.000}{75,6} = 728 \text{ m}^2,$$

l'envergure

$$2e = \sqrt{12 \times 728} = 93^m,60$$

et la puissance totale

$$\Pi_1 = 55.000 \times 0,1148 = 6310 \text{ CV.}$$

Pour évaluer la vitesse maximum plein gaz, on peut poser

$$C_x \approx C_{x_{\min}} = 0,03,$$

puisque la résistance induite sera très faible. Cela donne, avec un rendement d'hélice de 75 %

$$V_{\max} = \sqrt[3]{\frac{6310 \times 75 \times 0,75 \times 16}{728 \times 0,03}} = 63,9 \text{ m/sec} = 230 \text{ kmh.}$$

La vitesse de vol au début du voyage est, d'après (64)

$$V_0 = 61,3 \times \lambda^{-1/12} = 49,8 \text{ m/sec} = 179 \text{ kmh}$$

et à la fin

$$179 \sqrt{\frac{55.000 - 10.200}{55.000}} = 162 \text{ kmh.}$$

Pour la distance parcourue, on a, d'après (70)

$$D = 14.500 \lambda^{\frac{17}{36}} \left[1 - \left(\frac{P_1 - P_v}{P_1} \right)^{1/6} \right] =$$

$$= 14.500 \times 12^{\frac{17}{36}} \left[1 - \left(\frac{55.000 - 10.200}{55.000} \right)^{1/6} \right] = 1575 \text{ kms.}$$

La vitesse commerciale sera, en moyenne

$$\frac{179 + 162}{2} - 36 = 134,5 \text{ km/h.}$$

donc la durée du voyage

$$\frac{1575}{134,5} = 11,7 \text{ heures.}$$

Cherchons le nombre optimum de moteurs. Pour les moteurs actuels, on peut admettre que la chance de panne atteindrait 100 % pour une marche ininterrompue de 300 heures.

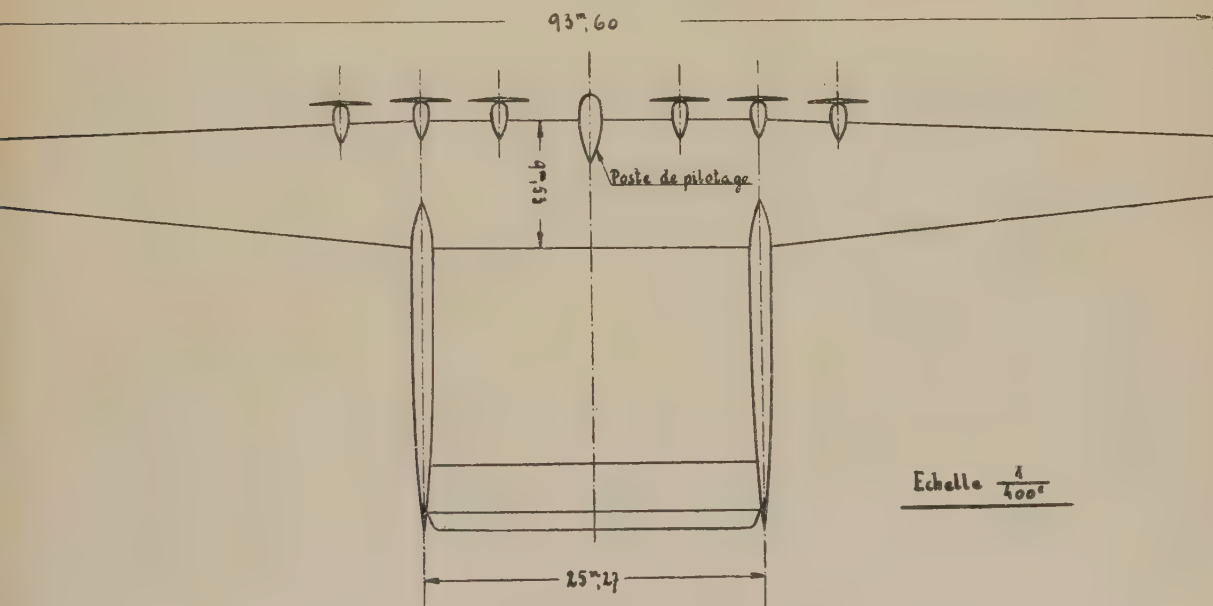


FIG. 20.

Si la durée du voyage est de 11,7 heures, la chance de panne d'un moteur sera donc

$$\frac{1}{k} = \frac{11,7}{300} = \frac{1}{26}.$$

La figure 17 donne comme optimum correspondant $n=6$.

En plaçant les six moteurs de 1.050 CV. chacun, sur le bord d'attaque de l'aile et les fuselages, munis des atterrisseurs, à une distance égale à 27 % de l'envergure, le plan de l'avion devient comme l'indique la figure 20.

Après avoir développé les formules nécessaires pour l'étude des conditions optima de l'agrandissement des avions commerciaux, il nous semble intéressant de mettre en évidence le gain sur le poids de voilure qui résulte de la répartition de la charge sur toute l'envergure.

Le tableau des coefficients $P_0 : P_t$ (page 53), montre que la valeur optima de λ , pour les grandes valeurs de P_t , tend vers $\lambda = 8$. Pour cette valeur, le poids de la poutre principale est donné par

$$P_t = \left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2} (0,518 \lambda^{4/3} + 5,64 \lambda^{1/6} + 0,668 \lambda^{1/3} + 4,49 \lambda^{-1/3}) = 19,8 \left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2}.$$

Le poids des groupes moteurs et des mécaniciens, par

$$P_{\text{mot}} = (87 + 400 \lambda^{-7/12}) \frac{P_t}{1000} = 206 \frac{P_t}{1000},$$

et le poids équipé par

$$(71) \quad P_0 = 42,6 \left(\frac{P_t}{1000} \right)^{3/2} + 309 \frac{P_t}{1000} + 377.$$

Considérons maintenant, un avion du type actuel, à charge concentrée dans un seul fuselage, et d'un poids total de 10.000 kgs. Pour diminuer le poids de la voilure, on va pratiquement jusqu'à $q_t = 80 \text{ kg/m}^2$, d'où

$$S = 125 \text{ m}^2.$$

En comptant sur un poids unitaire de 10 kg/m^2 , pour la poutre principale, on a

$$P_t' = 1250 \text{ kgs} = 39,6 \left(\frac{P_t'}{1000} \right)^{3/2};$$

Avec $\lambda = 8$, la formule (55) donne, pour la vitesse en montée

$$8,08 \times \sqrt{80} \times 8^{-1/4} = 42,9 \text{ m/sec.}$$

et la formule (56) donne comme puissance nécessaire

$$10.000 (0,0555 + 0,00545 \times 42,9 \times 8^{-1/2}) = 1383 \text{ CV.}$$

Le poids des groupes moteurs et des mécaniciens sera donc

$$1,5 \times 1383 \times 1,053 = 2180 \text{ kgs} = 218 \frac{P_t'}{1000}.$$

En admettant que les expressions pour les autres poids soient les mêmes que celles qui figurent dans la formule (69), le poids équipé devient

$$(72) \quad P_0' = [42,6 + (39,6 - 19,8)] \left(\frac{P_t'}{1000} \right)^{3/2} + [309 + (218 - 206)] \frac{P_t'}{1000} + 377 = \\ = 62,4 \left(\frac{P_t'}{1000} \right)^{3/2} + 321 \frac{P_t'}{1000} + 377.$$

Les formules (71) et (72) permettent de calculer le poids limite pour lequel le poids équipé devient égal au poids total

$$P_e = P_t;$$

$$(71) \quad P_t = 263.000 \text{ kgs.}$$

$$(72) \quad P_t' = 117.000 \text{ kgs.}$$

D'autre part, la valeur absolue de la charge utile $P_u = P_t - P_e$ atteindra son maximum pour

$$\frac{d}{dP_t} (P_t - P_e) = 0;$$

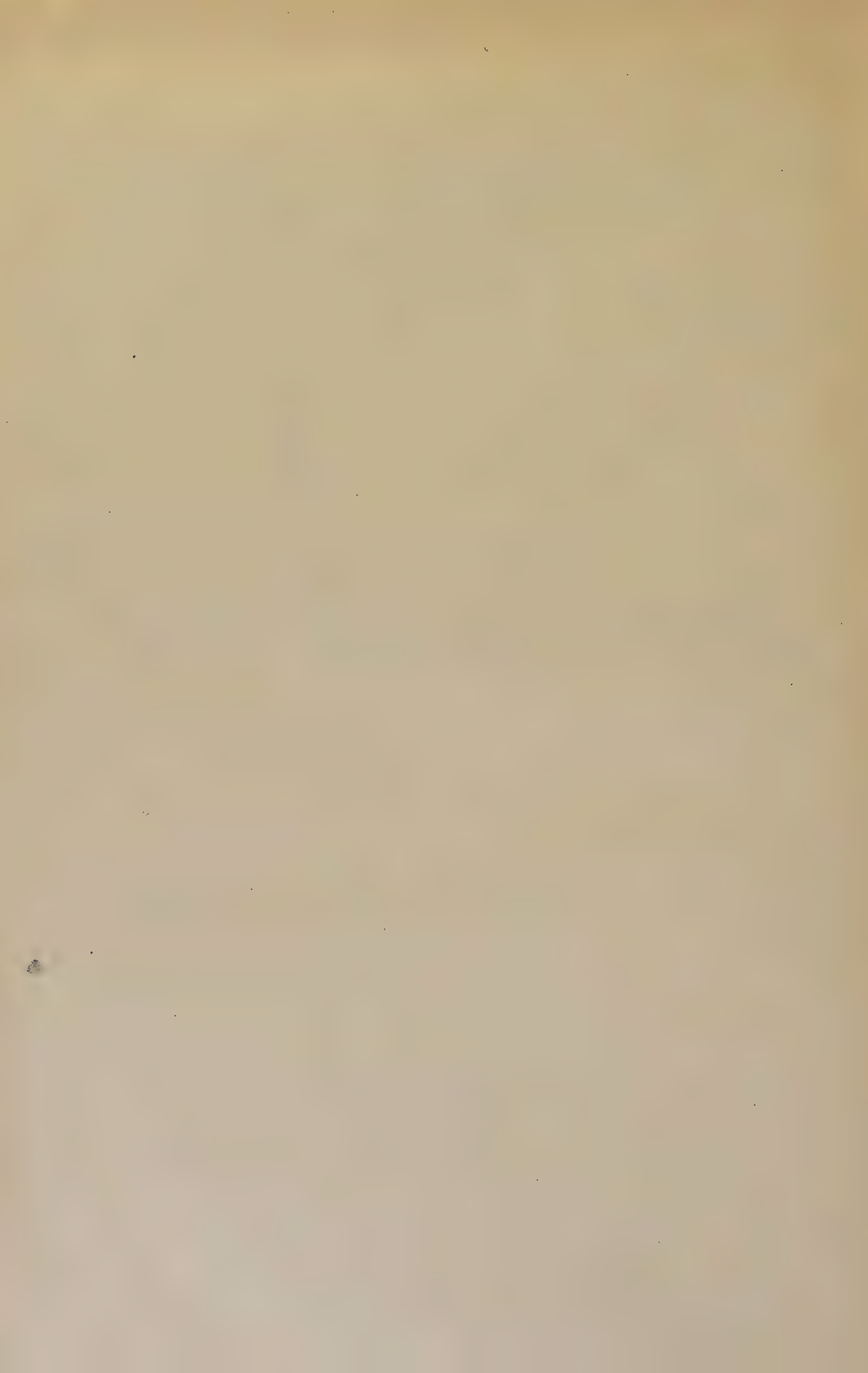
$$(71) \quad 691 - 1,5 \times 42,6 \left(\frac{P_t}{1000} \right)^{1,2} = 0; \quad P_t = 117.000 \text{ kgs};$$

$$P_{u \max} = 117.000 - 53.800 - 36.200 - 377 \approx \underline{26.600 \text{ kgs}};$$

$$(72) \quad 679 - 1,5 \times 63,4 \left(\frac{P_t'}{1000} \right)^{1/2} = 0; \quad P_t' = 52.500 \text{ kgs};$$

$$P_{u \max}' = 52.500 - 23.800 - 16.800 - 377 \approx \underline{11.500 \text{ kgs.}}$$

On voit l'énorme influence de la répartition des charges sur la limite absolue de l'agrandissement (pour laquelle le poids équipé égale le poids total) et sur la charge utile qui se trouve augmentée de plus du double.



CHAPITRE VIII

Résumé

Le présent travail envisage le problème de l'agrandissement des avions commerciaux sous sa forme la plus générale. Alors que des études antérieures se basaient toujours sur un agrandissement proportionnel, tout au moins en ce qui concerne la forme géométrique extérieure, nous avons établi un système d'équations, réunissant à la fois toutes les caractéristiques aérodynamiques et constructives d'un grand avion.

Tout d'abord, une nouvelle théorie sur la résistance des poutres à paroi mince nous a permis d'exprimer le poids de la voilure en fonction de son allongement, de la charge alaire, du poids total et de la puissance motrice.

Ensuite, le règlement international concernant les performances minima pour l'obtention du certificat de navigabilité donne des relations mathématiques entre ces mêmes variables.

La répartition optima entre le poids de combustible et celui de la charge marchande est déterminée de façon à ce que le produit de la charge marchande par le rayon d'action et par une certaine fonction de la vitesse commerciale, produit que nous appelons « Capacité de Transport », devienne maximum pour un poids total donné.

Finalement, la recherche du maximum absolu de la « Capacité de Transport » permet de déterminer la limite pratique de l'agrandissement et un calcul de probabilité indique le nombre optimum de moteurs au point de vue de la sécurité de fonctionnement.

Les valeurs numériques que nous avons données, permettent déjà une appréciation pratique du problème de l'agrandissement ; en dehors de cela, le système d'équations sur lequel repose cette étude est suffisamment souple pour étudier l'influence particulière de certaines données et permettra, de ce fait, de substituer l'analyse mathématique aux purs tâtonnements.

C'était là le but du présent travail.

LÉON KIRSTE.

Annexes

I

La figure 21 donne le schéma du montage qui a été fait au Laboratoire aérodynamique de Vienne (Autriche) pour déterminer la position du centre de pression sur une demi-aile.

La polaire de l'aile avait été relevée préalablement. Si la sustentation de la demi-surface, pour un angle donné est Z_0 , a la distance entre le plan de symétrie et le fil allant à la balance et Z' la sustentation mesurée par la balance avec le montage figuré, la distance cherchée entre le centre de pression de la demi-voilure et le plan de symétrie est

$$d = a \frac{Z'}{Z}.$$

II

Le diagramme, tracé d'après des essais effectués au Laboratoire Eiffel, donne les polaires et les courbes de moments pour trois profils d'aile, ayant sensiblement la même courbure moyenne d'environ 6 % et des épaisseurs relatives de 14.8 %, 23,7 % et 29 %. Les trois polaires ont été ramenées au même allongement de 6.

III

Le tableau ci-joint donne le résumé des essais de compression effectués sur des tubes circulaires de 50 millimètres de long, dont quelques échantillons, après déformation, sont représentés en coupe sur la figure 6.

Un essai préliminaire sur une éprouvette coupée dans la même barre, avait fait connaître la résistance unitaire à la traction R . L'essai de compression a été effectué entre deux appuis plats. La charge Q est celle correspondant à la formation du premier pli

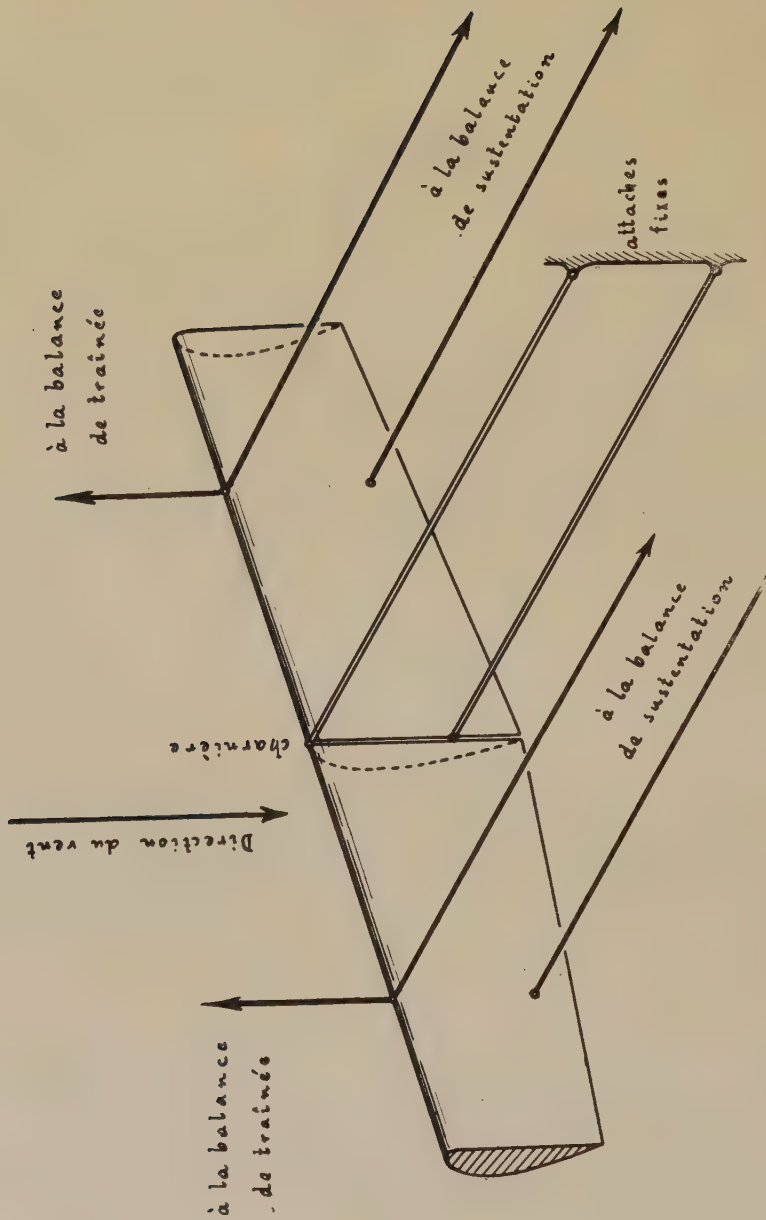


Fig. 21.

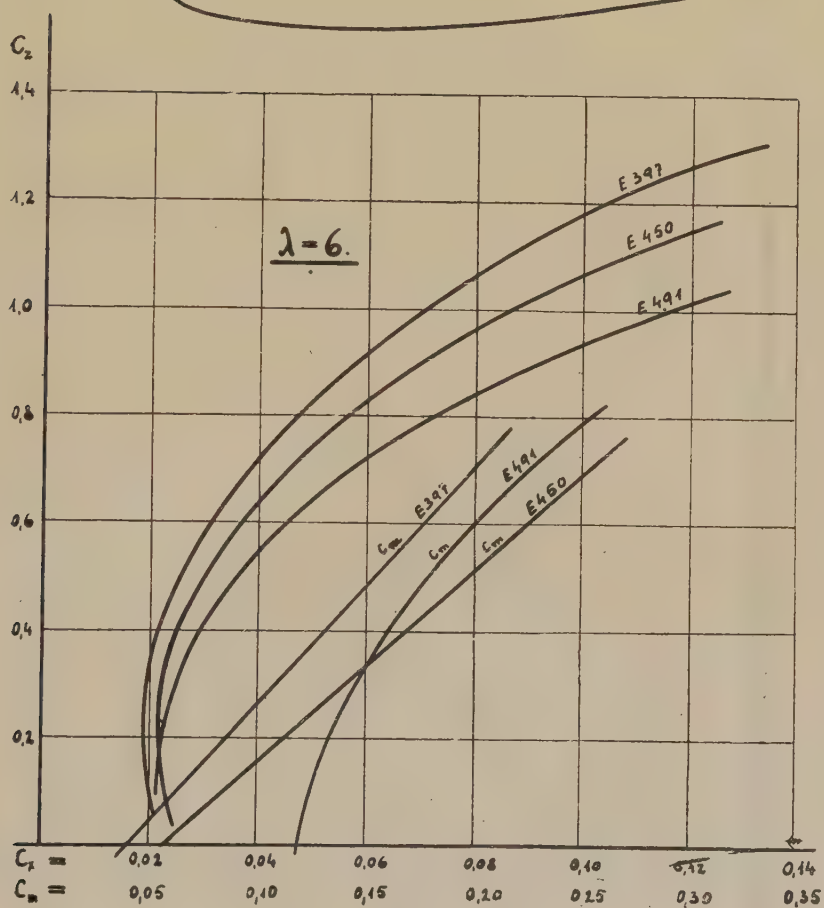
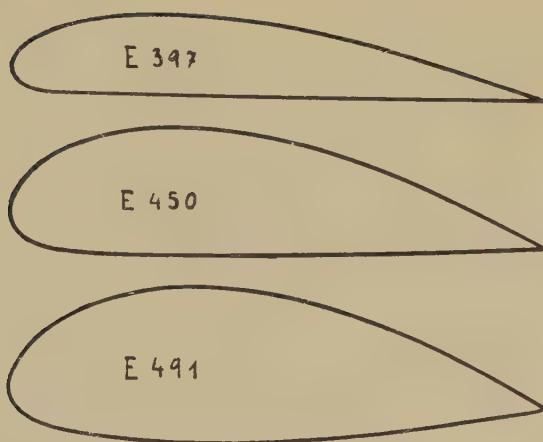


FIG. 22.

Essais de compression entre appuis plats, de tubes circulaires en acier et en duralumin

(Pour les designations, voir pages 30 et 31).

TUBE ACIER	r	e	r/e	$\sqrt{re}$	Ω	R	E	Q_2	$\frac{R\Omega}{Q_2} - 1$	$\left(\frac{R\Omega}{Q_2} - 1\right) \times \frac{E}{R} \times \frac{e}{r}$	l	$l : \sqrt{er}$
23/25	1,25	0,10	12,5	0,35	0,76	—	2,200.000	—	—	—	0,25	0,71
31/32	1,60	0,05	32,0	0,28	0,50	5200	2,200.000	2150	0,20	2,7	—	—
33,4/35	1,75	0,08	21,9	0,37	0,86	—	2,200.000	—	—	—	0,40	1,08
38,4/40	2,00	0,08	25,0	0,40	0,99	5200	2,200.000	4300	0,19	3,2	—	—
39/43	2,15	0,20	10,8	0,66	2,58	—	2,200.000	—	—	—	0,60	0,91
40/42	2,10	0,10	21,0	0,46	1,29	5200	2,200.000	5500	0,22	4,4	—	—
40/43	2,15	0,15	14,3	0,57	1,96	6400	2,200.000	11200	0,12	2,9	0,50	0,88
48/50	2,50	0,10	25,0	0,50	1,54	4900	2,200.000	6300	0,20	3,6	—	—
50/52	2,60	0,10	26,0	0,51	1,61	4900	2,200.000	6900	0,14	2,4	—	—
51/55	2,75	0,20	13,8	0,74	3,33	6400	2,200.000	19200	0,11	2,7	0,75	1,01
58/60	3,00	0,10	30,0	0,55	1,86	6400	2,200.000	9200	0,24	3,3	0,45	0,82
TUBE DURALUMIN.												
26/28	1,40	0,10	14,0	0,37	0,85	3500	750.000	2470	0,20	3,1	0,35	0,94
63.2/66	3,30	0,14	23,5	0,68	2,78	3500	750.000	6800	0,43	3,9	0,60	0,88
										Moyenne : 3,22		Moyenne : 0,90

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

**Étude comparative
des poids de construction d'un monoplan et d'un biplan.**

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le recteur de l'Université

S. CHARLETY

VU ET APPROUVÉ :

PARIS, LE 25 MAI 1928.

Le Doyen de la Faculté des Sciences.

C. MAURAIN

IMPRIMERIE DU PALAIS
20, RUE GEOFFROY-L'ASNIER
:: PARIS ::
